Többcélú Optimalizálás

▼ Bevezetés

Többcélú optimalizálás a gyakorlatban sokszor elfordul, mivel legtöbbször nem csak egyetlen, hanem azonosan több célunkat is meg szeretnénk valósítani.
A további fejezetekben az ilyen - lineáris programozási - esetek kezelésének módszereit mutatjuk be.
Nem törekszünk teljességre, inkább a fontosabb modellezési fogalmak, technikák ismertetése célunk.

▼ Szekvenciális optimalizálás módszere:

A több célfüggvény együttes kezelésének legegyszerbb módja, ha sorrendet állítunk a célok, vagyis függvények fontossága között. Ezt e sorrendet – nem matematikai módszer hanem - a saját szempontrendszerünk szolgáltatja. Úgy is szoktuk aposztrofálni, hogy „megkérjük a főnökünket, hogy rakja fontossági sorrendbe a céljait". Ekkor ugyanis az első cél teljesen „kielégítésre" maximalizálásra kerül az alatta lévkön viszont csak akkor tudunk javítani, ha azt az els cél „megengedi". Matematikailag ezt nevezik „szekvenciális optimalizálás"- nak.

Példa a szekvenciális optimalizálás módszerének alkalmazására:

Alkalmazzuk a szekvenciális optimalizálás módszerét az alábbi többcélú – három célfüggvénnyel rendelkező – lineáris programozási feladatra. A függvények preferencia sorrendje legyen azonos indexükkel. Vagyis elssorban az els célfüggvényt szeretnénk maximalizálni, csak ha azt sikerült - azon belül - nézzük, hogy lehet-e még a másodikat is maximalizálni, vagy legalább javítani. Hasonlóan a harmadikra stb.

Hagyományos családokban az édesapa a meghatározó, dönt. Amennyiben autokratikus, (a demokratikus ellentéte, antidemokratikus) mindig azt a csatornát kell néznie az - egyetlen - televízión a családnak amihez neki van kedve. Amennyiben neki több csatorna is egyformán kedves (például a sport csatornákat kedveli) a fiuk választhat ezek közül ha még így is egynél több csatorna jöhet szóba (a fiúnak is legalább két sport csatorna mindegy) akkor - azok közül - anyuka választhatja ki hogy melyiket fogja nézni a család. (A példa mai elektronikus eszközökkel bvel felszerelt világunkban elavultnak tnhet, de reméljük rávilágít a preferenciák sorrendjének fogalmára.)

Matematikai példánk egy több célfüggvénnyel rendelkez normál lineáris programozási feladat:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \quad + \quad x_4 + x_5 &\leq 100 \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\leq 80 \\
x_1 + x_2 + x_3 + \quad 2\,x_5 &\leq 50
\end{aligned}
$$

$$z_1 = \qquad 3\,x_2 - 10\,x_3 + 3\,x_4 - 7\,x_5 = \text{max.}$$

$$z_2 = \; 3\,x_1 + 6\;\,x_2 + 4\,x_3 + 5\,x_4 + 6\,x_5 = \;\text{max.}$$
$$z_3 = \; x_1 + 7\;\,x_2 + 12\,x_3 + 13\,x_4 + 9\,x_5 \;\; = \;\text{max.}$$

ahol x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nemnegatív kell legyen

Az induló Szimplex tábla felírása teljesen hasonló a lineáris programozásnál megismertekkel, csak itt több, (esetünkben három) célfüggvény sort kell konstruálnunk.

multiObjectInput1( );

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ u_1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 1 & 60 \\ u_2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 100 \\ u_3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 60 \\ z_1 & 0 & 6 & -10 & 3 & -7 & 0 \\ z_2 & 13 & 16 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ z_3 & 1 & 7 & 12 & 13 & 9 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Az elst báziscserét végrehajthatjuk például az x_4 oszlopában és az u_2 sorában.

bazisChange(u_2, x_4);

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & u_2 & x_5 & b \\ u_1 & 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 160 \\ x_4 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 100 \\ u_3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 60 \\ z_1 & 0 & 0 & -13 & -3 & -4 & -300 \\ z_2 & 13 & 6 & -1 & -5 & 11 & -500 \\ z_3 & 1 & -19 & -1 & -13 & 22 & -1300 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.2)}$$

Láthatóan már az els báziscserét követ tábla optimális z_1 szempontjából (mivel csak nem pozitív elemek állnak a célfüggvény sorban) és alternatív optimummal is rendelkezik a z_1 célfüggvény. Az alternatív optimumot jelent 0 értékek alatt a z_2 sorában pozitív értékek állnak, Vagyis a további báziscserékkel, - melyek z_1 alternatív optimumának kiszámolását jelentenék, ha csak z_1 lenne az egyedi célfüggvény, most - z_2 még javítható, egy vagy két lépésben. (attól függen, hogy a nagyobb pozitív vagy a kisebb pozitív felett választunk. (Mi a "rosszabbik, több lépést igényl" esetet választottuk, csak hogy hosszabban demonstráljuk a módszert.)
Az u_3 sor és z_2 oszlopbeli -est választva pivot elemnek:

$bazisChange(u_3, x_2)$;

$$\begin{bmatrix} 2 & x_1 & u_3 & x_3 & u_2 & x_5 & b \\ u_1 & -3 & -5 & -4 & 1 & -10 & -140 \\ x_4 & -2 & -2 & -1 & 1 & -5 & -20 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 60 \\ z_1 & 0 & 0 & -13 & -3 & -4 & -300 \\ z_2 & 7 & -6 & -7 & -5 & -1 & -860 \\ z_3 & 20 & 19 & 18 & -13 & 60 & -160 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Láthatóan javult a második célfüggvény értéke (z_2 = 500-ról z2=860-ra emelkedett) .
Azonban még mindig található pozitív elem a második célfüggvény sorában. E felett választva báziscsere elemet:

$bazisChange(x_2, x_1)$;

$$\begin{bmatrix} 3 & x_2 & u_3 & x_3 & u_2 & x_5 & b \\ u_1 & 3 & -2 & -1 & 1 & -4 & 40 \\ x_4 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 100 \\ x_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 60 \\ z_1 & 0 & 0 & -13 & -3 & -4 & -300 \\ z_2 & -7 & -13 & -14 & -5 & -15 & -1280 \\ z_3 & -20 & -1 & -2 & -13 & 20 & -1360 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Láthatóan sikerült a második célfüggvényt is optimalizálnunk. (Mivel csak nem pozitív elemek állnak z_2 sorában.)
A megoldás tovább nem javítható. Bármely további - z_3 javítására tett - báziscsere hatására a preferált z_1 célfüggvény értékei romolnának.

A szekvenciális optimalizálás által szolgáltatott megoldás tehát:

$bazisSolution(\,)$;
$goalFunctionValues(\,)$;

$$x_1 = 60, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 100, x_5 = 0$$

$$\text{"célfüggvények:"}\ (z_1 = 300, z_2 = 1280, z_3 = 1360) \tag{2.5}$$

A szekvenciális optimalizálási módszer alkalmazása három dimenziós feladatra

Tekintsük az alábbi feladatot:

$2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \le 60,$
$x_1 + 2\cdot x_2 \le 100,$
$x_1 + 4\cdot x_3 \le 400,$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 60$

$6\cdot x_2 + 9\cdot x_3,$
$x_1 + x_2 + x_3,$
$2\cdot x_1 - 5\cdot x_2 - 10\cdot x_3$

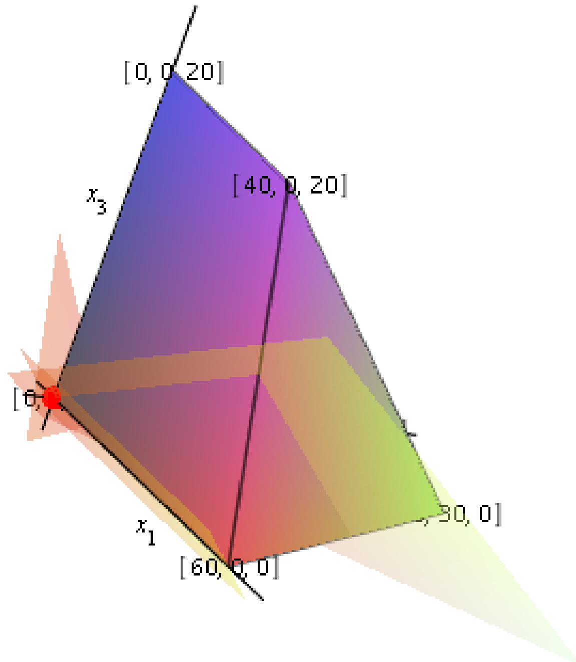
Melynek induló táblája: (A szokásos mátrixos alakban):
multiObjectInput1( );

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 0 & 2 & 3 & 60 \\ u_2 & 1 & 2 & 0 & 100 \\ u_3 & 1 & 0 & 4 & 400 \\ u_4 & 1 & 1 & 1 & 60 \\ z_1 & 0 & 6 & 9 & 0 \\ z_2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ z_3 & 2 & -5 & -10 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

A tartomány és a célfüggvények (Az origón átmen induló állapotukban):
bazisSolution( );
goalFunctionValues( );
abra3dMulti( );

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$$

$$\text{"célfüggvények:"} \left(z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0\right)$$



Els báziscsere:

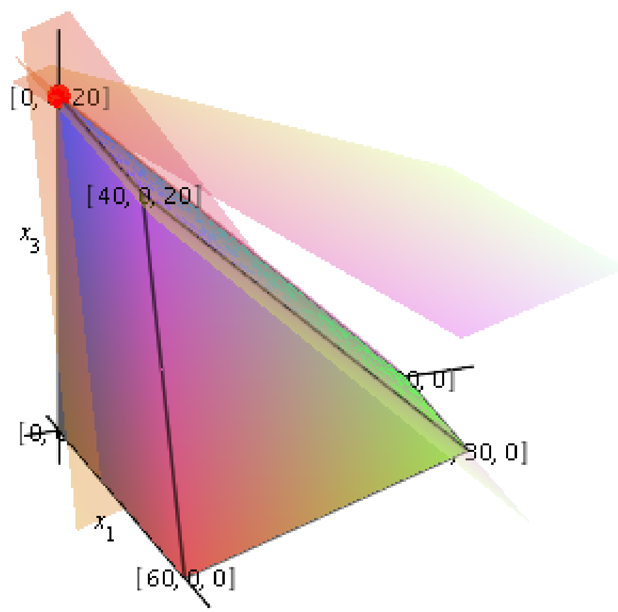
bazisChange(u_1, x_3);

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & u_1 & b \\ x_3 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 20 \\ u_2 & 1 & 2 & 0 & 100 \\ u_3 & 1 & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & 320 \\ u_4 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 40 \\ z_1 & 0 & 0 & -3 & -180 \\ z_2 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -20 \\ z_3 & 2 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} & 200 \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

Els bázis csere után z_1 máris optimális - kétszeresen végtelen sok alternatív optimum hellyel. (Mivel a célfüggvény sorában két nulla áll.)
A megoldás ekkor és grafikus megjelenítése:
bazisSolution( );
goalFunctionValues( );
abra3dMulti( );

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 20$$

$$\text{"célfüggvények:"} \left(z_1 = 180, z_2 = 20, z_3 = -200\right)$$



z_2 viszont még nem optimális.(Van még pozitív elem a célfüggvény sorában.) Ezért újabb báziscserét hajtunk végre:
bazisChange$\left(u_4, x_1\right)$;

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & u_4 & x_2 & u_1 & b \\ x_3 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 20 \\ u_2 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 60 \\ u_3 & -1 & -3 & -1 & 280 \\ x_1 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 40 \\ z_1 & 0 & 0 & -3 & -180 \\ z_2 & -1 & 0 & 0 & -60 \\ z_3 & -2 & 1 & 4 & 120 \end{array}\right] \tag{2.1.3}$$

Második bázis csere utáni állapot:

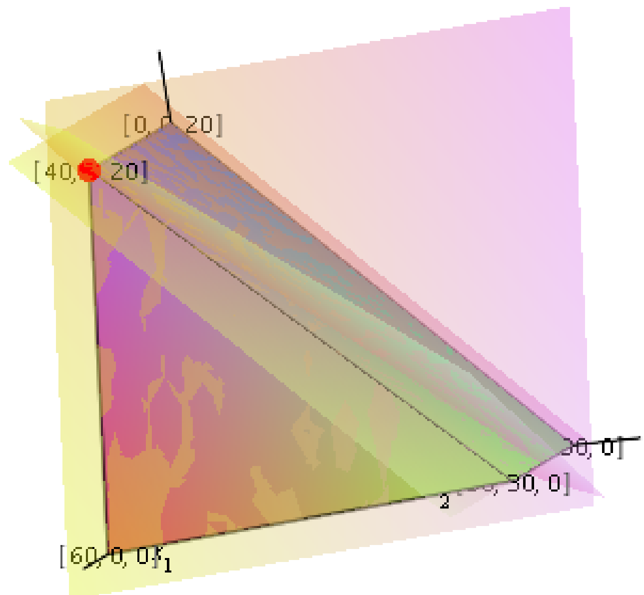
Most már z_2 is optimális, szintén kétszeresen végtelen sok alternatív optimum hellyel. (A célfüggvény sorában itt is két nulla áll - de másik oszlopban.)

A nullák alatt választhatunk még báziscsere elemet:

bazisSolution( );
goalFunctionValues( );
abra3dMulti( );

$$x_1 = 40, x_2 = 0, x_3 = 20$$

$$\text{"célfüggvények:"} \left(z_1 = 180, z_2 = 60, z_3 = -120\right)$$



Láthatóan az egyik célfüggvény illeszkedik a tartomány egyik határoló lapjára a másik pedig egy másikra, a harmadik pedig a közös él másik végpontján vesz fel nagyobb (kisebb negatív) értéket. Ezt határozzuk meg az alábbi báziscserével:

$bazisChange\left(x_3, x_2\right);$

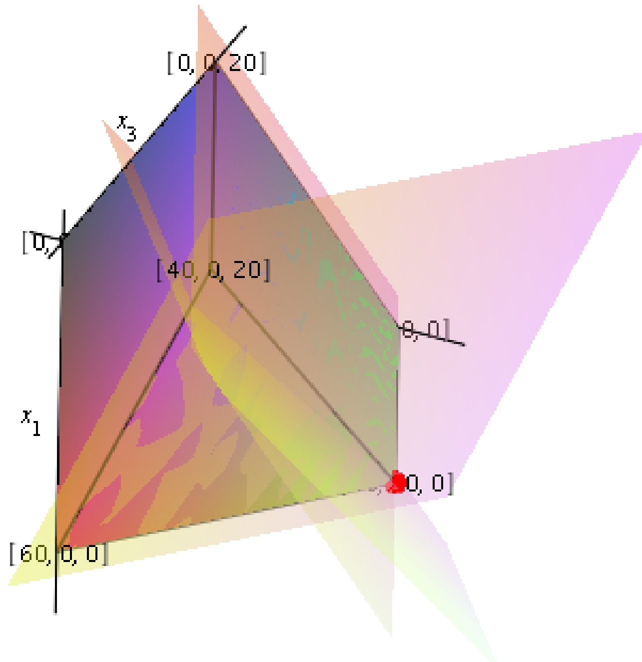
$$\begin{bmatrix} 3 & u_4 & x_3 & u_1 & b \\ x_2 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 30 \\ u_2 & -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 10 \\ u_3 & -1 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 370 \\ x_1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 30 \\ z_1 & 0 & 0 & -3 & -180 \\ z_2 & -1 & 0 & 0 & -60 \\ z_3 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 90 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

A harmadik bázis csere után a megoldás - szekvenciális optimalizálási módszerrel - tovább nem javítható.

bazisSolution( );
goalFunctionValues( );
abra3dMulti( );

$$x_1 = 30, x_2 = 30, x_3 = 0$$

$$\text{"célfüggvények:"} \left(z_1 = 180, z_2 = 60, z_3 = -90\right)$$



Három dimenziós feladatunk esetén grafikusan is meg tudtuk mutatni az alternatív optimumokat és a további célfüggvények szerinti javítást.

Összefogalva:

1. A szekvenciális optimalizálás módszerét általában több (mint 2 vagy 3) dimenziós feladatokhoz érdemes használni, (ahol a grafikus megjelenítés nem lehetséges) de - mint utolsó, demonstrációs céllal készített alfejezetünk mutatja - 3 dimenziós feladatok kezelésére is alkalmas.
2. A fenti eljárás alkalmas - az esetlegesen létez - abszolút optimum megkeresésére is.

Többcélú optimalizálási feladat grafikus szemléltetései és az abszolút optimum fogalma

Ebben a fejezetben megpróbáljuk ábrázolással mélyebben megérteni a többcélú optimalizálási feladatok "lelki világát". A rajzok elkészítéséhez számolásra is szükségünk van. Először arra, hogy mely célfüggvény melyik pontban veszi fel egyedi optimumát.

Tekintsük az alábbi kétdimenziós példa feladatot:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \le 100, \\ x_1 + x_2 \le 80, \\ x_1 - x_2 \le 50, \\ x_1 \ge 0 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \hline 3\cdot x_1 - 3\cdot x_2, \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2, \\ x_1 + 7\cdot x_2 \end{gathered}$$

Induló táblája:
multiObjectInput2( );

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 100 \\ u_2 & 1 & 1 & 80 \\ u_3 & 1 & -1 & 50 \\ u_4 & -1 & 0 & 0 \\ z_1 & 3 & -3 & 0 \\ z_2 & 3 & 2 & 0 \\ z_3 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Báziscsere végrehajtása a harmadik célfüggvény optimalizálása céljából:
(A második célfüggvény együttható felett a minimális hányadosnál.)

$bazisChange(u_2, x_2)$;

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_2 & b \\ u_1 & 0 & -1 & 20 \\ x_2 & 1 & 1 & 80 \\ u_3 & 2 & 1 & 130 \\ u_4 & -1 & 0 & 0 \\ z_1 & 6 & 3 & 240 \\ z_2 & 1 & -2 & -160 \\ z_3 & -6 & -7 & -560 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

A fenti tábla máris optimális de csak a harmadik célfüggvény szempontjából!

$xz3optSol := bazisSolution(\,);$
$xz3opt := mo:$
$ziz12opt := goalFunctionValues(\,);$

$$x_1 = 0, x_2 = 80$$

$$\text{"célfüggvények:"}\ (z_1 = -240, z_2 = 160, z_3 = 560) \tag{3.3}$$

Optimalizáljunk z_2 szempontjából:
Ekkor x_1 oszlopában választjuk a minimális hányadost és a második tábla az alábbi:

$bazisChange(u_3, x_1);$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_3 & x_2 & b \\ u_1 & -1 & 2 & 50 \\ u_2 & -1 & 2 & 30 \\ x_1 & 1 & -1 & 50 \\ u_4 & 1 & -1 & 50 \\ z_1 & -3 & 0 & -150 \\ z_2 & -3 & 5 & -150 \\ z_3 & -1 & 8 & -50 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Ennek hatására az els célfüggvény máris optimális lett, alternatív optimummal, mely feletti pivot elem választással a második célfüggvény tovább javítható, optimalizálható.

$bazisChange(u_2, x_2);$

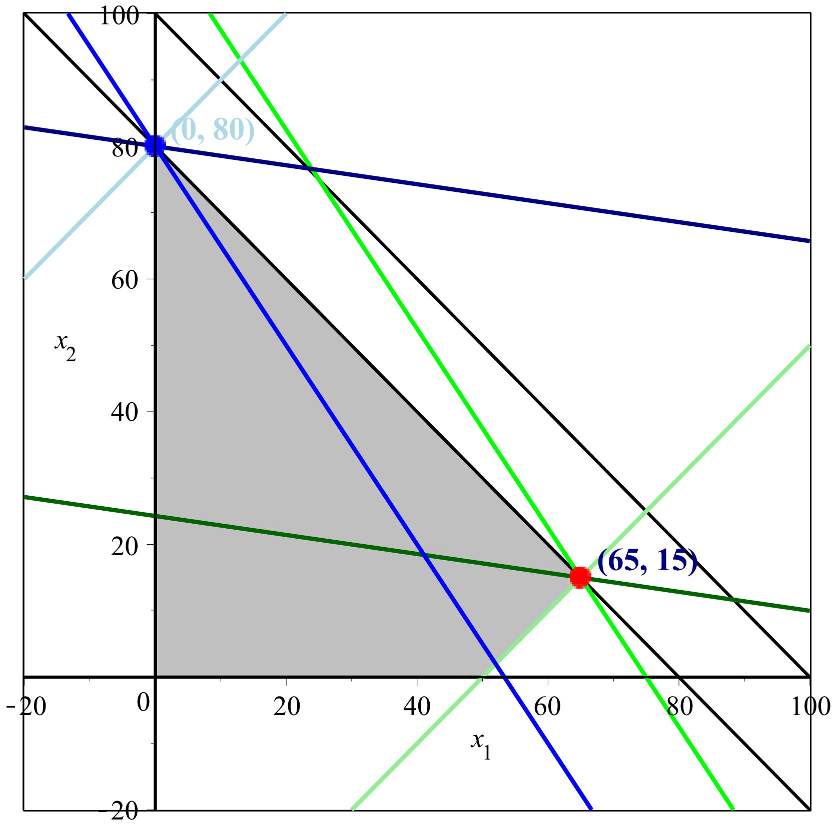
$$\begin{bmatrix} 2 & u_3 & u_2 & b \\ u_1 & 0 & -1 & 20 \\ x_2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 15 \\ x_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 65 \\ u_4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 65 \\ z_1 & -3 & 0 & -150 \\ z_2 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -225 \\ z_3 & 3 & -4 & -170 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Mind az els mind a második célfüggvény optimálissá vált.
Eredményeinket összefoglalva és grafikusan szemléltetve:
z_1 , z_2 közös optimális pontja kékkel jelölve, ebben a célfüggvények rendre világos, közép és sötét kékkel, valamint z_3 optimalitási pontja (pirossal) ebben a célfüggvények pedig: z_1 világos, z_2 élénk, z_3 pedig sötétzöld színnel jelölve.

"z3 optimuma:", *xz3optSol*, *ziz12opt*;
"z1 és z2 optimuma: ", *bazisSolution*( ), *goalFunctionValues*( );
abra2dVis1( );

"z3 optimuma:", $x_1 = 0$, $x_2 = 80$, "célfüggvények:" $(z_1 = -240, z_2 = 160, z_3 = 560)$

"z1 és z2 optimuma: ", $x_1 = 65$, $x_2 = 15$, "célfüggvények:" $(z_1 = 150, z_2 = 225, z_3 = 170)$



Az ábrán látható az els célfüggvény alternatív optimum tulajdonsága, - vagyis hogy egyenese egybe esik a tartományt egyik határoló egyenesével (a harmadik feltételi egyenlet képével) - és hogy maximum helye [65 , 15] megegyezik a második célfüggvényével.
A harmadik célfüggvény értéke ezen pontban csak z_3 = 170, mely maximum értékének csak harmada.
A harmadik célfüggvény maximumát
($z_{3\,\max}$ = 560) a [0 , 80] -as pontban veszi fel, ahol z_1 = -240 nem is nyereséget hanem veszteséget produkál, z_2 pedig az optimálisnál kisebb z_2 = 160 -as értéket vesz fel.

Ezen eredményeinket "kereszt eredménytáblában" is megjeleníthetjük, ahol az egyik célfügvény optimalitási pontjában megadjuk a többi értékét is. Ez jó áttekintést ad a célfüggvények egymáshoz való viszonyáról is.
"Tréfásan szociális érzékszer táblázatnak is titulálhatjuk, ahol vizsgáljuk azt is, hogy ha nekünk jó akkor többiek hogyan érzik magukat."

A táblázat fátlójában félkövérrel kiemelten állnak a célfüggvények maximum értékei:
Mj: a $z_{3\,\max}$ sorában z_2 oszlopában álló elem azt jelenti, hogy z_3 maximumának helyén a z_2 célfüggvény a 160 - ös értéket veszi fel.

$z_{i\,\max}$	z_1	z_2	z_3	$\underline{x}^T_{optimal}$
$z_{1\,\max} = z_1\left(\underline{x}^T_{z1\ optimal}\right)$	**150**	225	170	[65 , 15]
$z_{2\,\max} = z_2\left(\underline{x}^T_{z2\ optimal}\right)$	150	**225**	170	[65 , 15]
$z_{3\,\max} = z_3\left(\underline{x}^T_{z3\ optimal}\right)$	-24\ 0	160	**560**	[0 , 80]

Fentiekbl a tanulság lehet, hogy a legtöbb esetben nem lehetséges különböz célok egyidej elérése.

Módosítsuk egy kicsit feladatunkat, és vizsgáljuk az alábbi esetet:

$$x_1 + x_2 \le 100,$$
$$x_1 + x_2 \le 80,$$
$$x_1 - x_2 \le 50,$$
$$x_1 \ge 0$$

$$\overline{\quad 3\cdot x_1 - 3\cdot x_2, \quad}$$
$$3\cdot x_1 + 2\cdot x_2,$$
$$x_1 + 1\cdot\ \ x_2$$

(úgy hogy a harmadik célfüggvény optimális pontja is ugyanaz legyen.)
Ennek induló táblája:

multiObjectInput3( );

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 100 \\ u_2 & 1 & 1 & 80 \\ u_3 & 1 & -1 & 50 \\ u_4 & -1 & 0 & 0 \\ z_1 & 3 & -3 & 0 \\ z_2 & 3 & 2 & 0 \\ z_3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Az els báziscsere:

$bazisChange(u_3, x_1)$;

$$\begin{bmatrix} 1 & u_3 & x_2 & b \\ u_1 & -1 & 2 & 50 \\ u_2 & -1 & 2 & 30 \\ x_1 & 1 & -1 & 50 \\ u_4 & 1 & -1 & 50 \\ z_1 & -3 & 0 & -150 \\ z_2 & -3 & 5 & -150 \\ z_3 & -1 & 2 & -50 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Az z_1 optimálissá vált. Folytatva a második célfügvény pozitív eleme felett:

$bazisChange(u_2, x_2)$;

$$\begin{bmatrix} 2 & u_3 & u_2 & b \\ u_1 & 0 & -1 & 20 \\ x_2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 15 \\ x_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 65 \\ u_4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 65 \\ z_1 & -3 & 0 & -150 \\ z_2 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -225 \\ z_3 & 0 & -1 & -80 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Mindhárom célfüggvény optimális!
Az optimális megoldás:

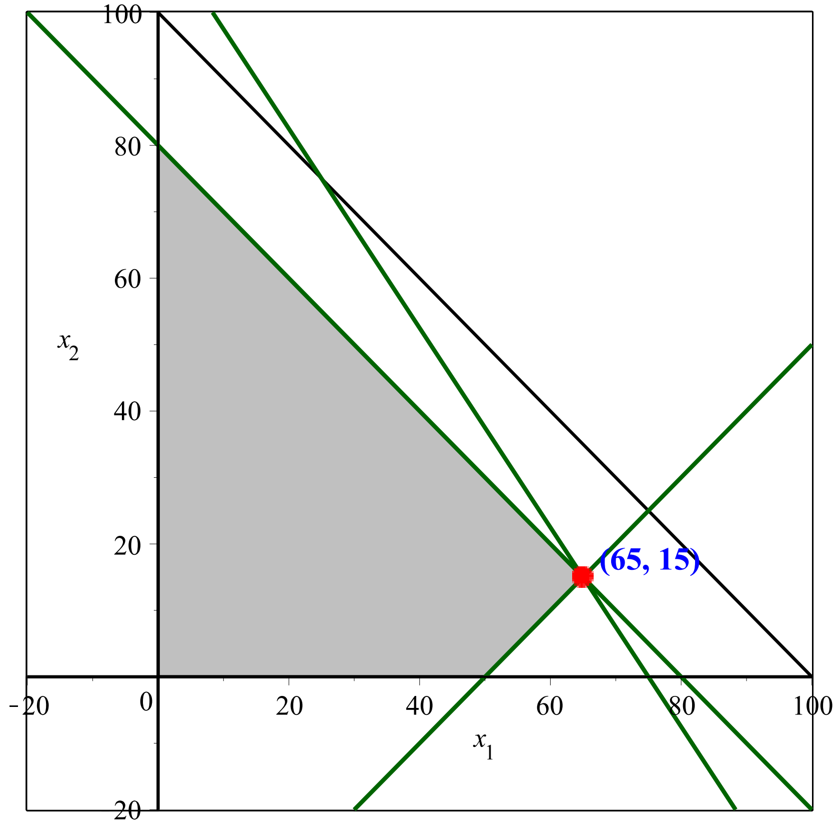
bazisSolution( );
goalFunctionValues( );

$$x_1 = 65, x_2 = 15$$

$$\text{"célfüggvények:"} \left(z_1 = 150, z_2 = 225, z_3 = 80\right) \tag{3.9}$$

Grafikonon szemléltetve:

abra2dMultiGoal( );



Látható, hogy mindhárom célfüggvény ugyanazon pontban veszi fel optimumát. (Az egyik a tartomány egyik határoló egyenesére illeszkedik, a másik egy másik határra. Mindkettnek alternatív optimuma van. (Ezen tulajdonság nem szükséges.)
Ezt az esetet nevezzük abszolút optimum esetének. Mely ritka és a helyzetbl, feladatból adódik az abszolút optimum léte, nem ügyességünkbl, hogy megtaláljuk-e.

Matematikai definíciója az alábbi:

Abszolút optimum :=
A bevezetésben definiált

$$\underline{A}\cdot\underline{x} \le \underline{b} \qquad \underline{x} \ge \underline{0} \quad ; \quad \underline{b} \ge \underline{0}$$

$$\underline{x}\ ,\ \underline{b}\ \in\ R^n$$

$$z_1 = \underline{c}_1^{\,T}\cdot\underline{x} = \text{max.}$$

$$z_2 = \underline{c}_2^{\,T}\cdot\underline{x} = \text{max.}$$

$$\vdots$$

$$z_m = \underline{c}_m^{\ T} \cdot \underline{x} = \max.$$

többcélú optimalizálási feladatnak abszolút optimuma van, ha létezik $\underline{x}_{\ opt} \in L$ ahol
$L := \{\underline{x} \mid \underline{A} \cdot \underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$
melyre bármely más $\underline{x} \in L$ -re teljesül az alábbi:

$$z1 = \underline{c}_1^{\ T} \cdot \underline{x} \leq \underline{c}_1^{\ T} \cdot \underline{x}_{\ opt}$$
$$z2 = \underline{c}_2^{\ T} \cdot \underline{x} \leq \underline{c}_2^{\ T} \cdot \underline{x}_{\ opt}$$
$$\vdots$$
$$z_m = \underline{c}_m^{\ T} \cdot \underline{x} \leq x_3^{\ T} \cdot \underline{x}_{\ opt}$$

És a fentiek közül legalább egyben határozottan nagyobb reláció teljesül.

Vagyis hogy nincs más olyan pont, mely bármely célfüggvényre nagyobb értéket szolgáltatna, mint az $\underline{x}_{\ opt}$ pont.
Fogalmazhatjuk úgy is hogy célfüggvényeink egyedi maximumainak helye azonos, közös. Ezen pont az összes célfüggvényt egyszerre elégíti ki.
Köznapi megfogalmazásban: van olyan megoldás, mely mindenkinek a (lehetséges) maximális elégedettséget nyújtja.

Mj: Nem szükséges, hogy (mint a korábi példában) bármelyik célfüggvényünknek alternatív optimuma legyen. Ezt az alábbi példa szemlélteti:

Tekintsük az alábbi kétdimenziós feladatot:

$$x_1 + x_2 \leq 100,$$
$$x_1 + x_2 \leq 80,$$
$$x_1 - x_2 \leq 50,$$
$$x_1 \geq 0$$

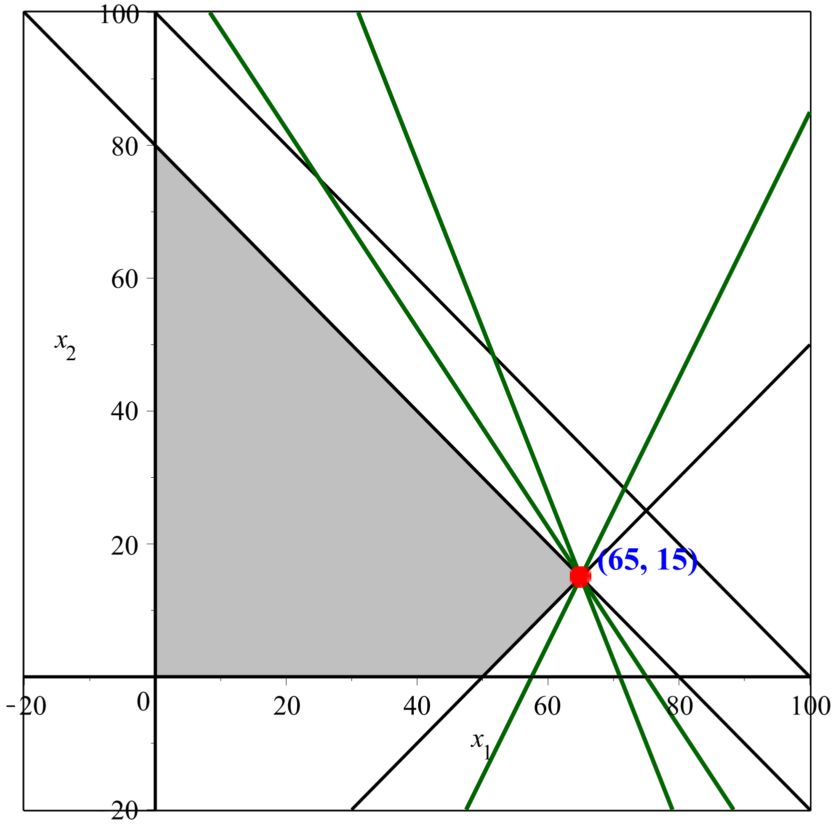
$$\overline{\quad 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2, \quad}$$
$$2 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2,$$
$$3 \cdot \ x_1 + 2 \cdot \ x_2$$

Az induló és a további Szimplex táblák:
$multiObjectInput4(\ ),\ bazisChange(u_3, x_1),\ bazisChange(u_2, x_2);$
$bazisSolution(\ ),\ goalFunctionValues(\ );$
$abra2dMultiGoal(\ );$

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 100 \\ u_2 & 1 & 1 & 80 \\ u_3 & 1 & -1 & 50 \\ u_4 & -1 & 0 & 0 \\ z_1 & 5 & 2 & 0 \\ z_2 & 2 & -1 & 0 \\ z_3 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & u_3 & x_2 & b \\ u_1 & -1 & 2 & 50 \\ u_2 & -1 & 2 & 30 \\ x_1 & 1 & -1 & 50 \\ u_4 & 1 & -1 & 50 \\ z_1 & -5 & 7 & -250 \\ z_2 & -2 & 1 & -100 \\ z_3 & -3 & 5 & -150 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & u_3 & u_2 & b \\ u_1 & 0 & -1 & 20 \\ x_2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 15 \\ x_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 65 \\ u_4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 65 \\ z_1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -355 \\ z_2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -115 \\ z_3 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -225 \end{bmatrix}$$

A megoldás és grafikus reprezentációja:

$$x_1 = 65, x_2 = 15, \text{"célfüggvények:"} \left(z_1 = 355, z_2 = 115, z_3 = 225\right)$$



Láthatón egyik célfüggvénynek sincs alternatív optimuma, de a feladat abszolút optimummal rendelkezik.

Három dimenziós módosított normál feladat példa abszolút optimumra

Tekintsük az alábbi három célfüggvényes, három dimenziós példát:

$$4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 - x_3 \leq 16,$$
$$-4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 32,$$
$$x_1 \leq 8,$$
$$x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 \leq 4,$$
$$6 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 = 18$$

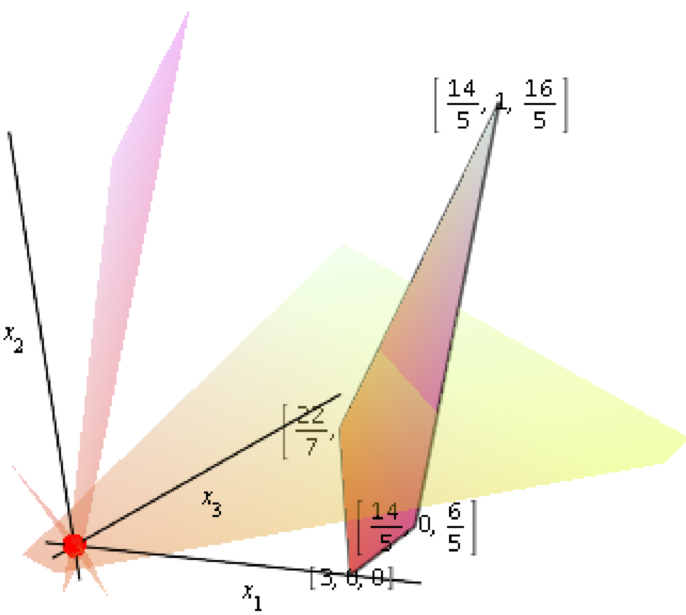
$$3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3,$$

$$2\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + x_3,$$
$$-x_1 + \ 4\cdot \ x_2 + x_3$$

Az induló tábla:
(Az egyenlséges sort a szokásos u*-al jelöltük.)

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 4 & 8 & -1 & 16 \\ u_2 & -4 & 2 & 0 & 32 \\ u_3 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ u_4 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ u*_5 & 6 & -2 & 1 & 18 \\ z_1 & 3 & 7 & 3 & 0 \\ z_2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ z_3 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ z* & 6 & -2 & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

A megengedhet megoldások tartmonánya (módosított normál feladat esetén) az egyenlséges sorok által meghatározott síknak azon része, melyet a többi feltétel kivág belle. Ez látszik az alábbi ábrán.
A Szimplex módszer kezdetekor azonban mindhárom célfüggvény még az origón megy át (egyikbl csak egy nagyon kis rész látható, a nézpont változtatással talán jobban) :



A második Szimplex tábla:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & u*_5 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & -\frac{2}{3} & \frac{28}{3} & -\frac{5}{3} & 4 \\ u_2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 44 \\ u_3 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 5 \\ u_4 & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{6} & 1 \\ x_1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 3 \\ z_1 & -\frac{1}{2} & 8 & \frac{5}{2} & -9 \\ z_2 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -6 \\ z_3 & \frac{1}{6} & \frac{11}{3} & \frac{7}{6} & 3 \\ z* & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

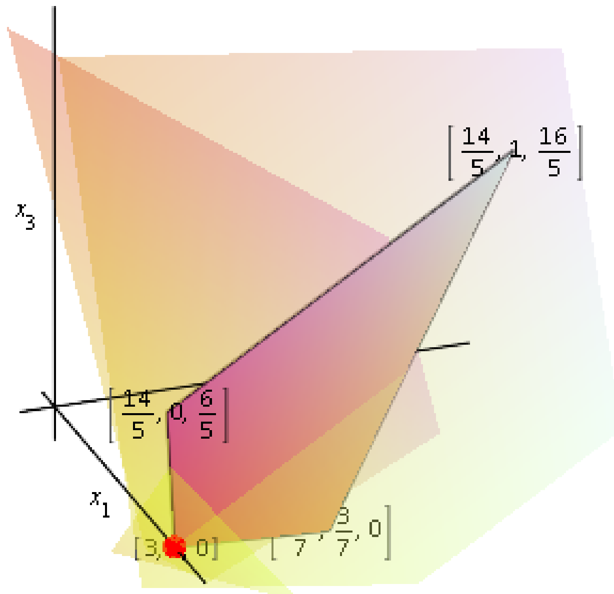
multiObjectInputmod4b( );
bazisSolution( ), *goalFunctionValues*( );
abra3dMulti( );

Melyrl leolvasható megoldás:

$$x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 0, \text{"célfüggvények:"} \left(z_1 = 9, z_2 = 6, z_3 = -3\right)$$

A grafikon:

abra3dMulti( );



Láthatóan - algebrailag - z* -ot már sikerült kielégítenünk. Grafikusan ez azt jelenti, hogy ráléptünk az egyenlséges sornak megfelel síkra.

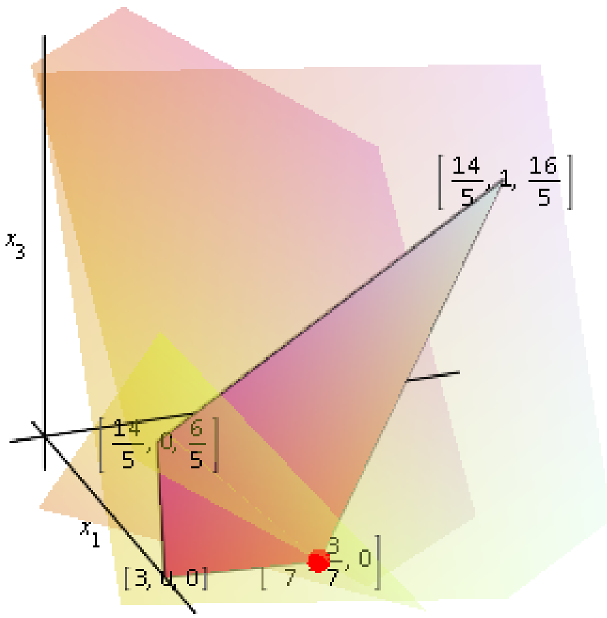
Az u1 , x2 cserét követ harmadik Szimplex tábla:

$$\begin{bmatrix} 2 & u*_5 & u_1 & x_3 & b \\ x_2 & -\frac{1}{14} & \frac{3}{28} & -\frac{5}{28} & \frac{3}{7} \\ u_2 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{11}{14} & \frac{306}{7} \\ u_3 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{28} & -\frac{3}{28} & \frac{34}{7} \\ u_4 & -\frac{2}{7} & \frac{5}{28} & \frac{15}{28} & \frac{12}{7} \\ x_1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{28} & \frac{3}{28} & \frac{22}{7} \\ z_1 & \frac{1}{14} & -\frac{6}{7} & \frac{55}{14} & -\frac{87}{7} \\ z_2 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{38}{7} \\ z_3 & \frac{3}{7} & -\frac{11}{28} & \frac{51}{28} & \frac{10}{7} \\ z* & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az errl leolvasható megoldás és az ábra:

$$x_1 = \frac{22}{7}, x_2 = \frac{3}{7}, x_3 = 0, \text{"célfüggvények:"} \left(z_1 = \frac{87}{7}, z_2 = \frac{38}{7}, z_3 = -\frac{10}{7} \right)$$

abra3dMulti( );



Továbbléptünk az egyenlséges síkon a nagyobb célfüggvény értékek felé.

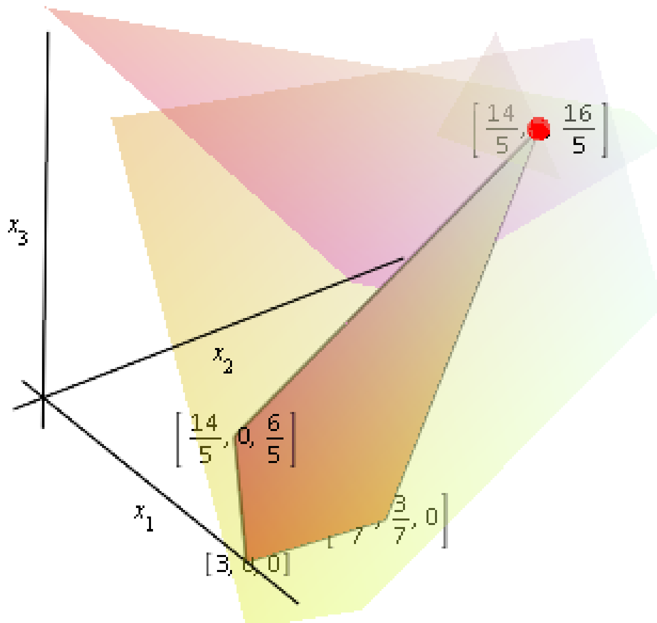
Az u4 , x3 cserét követ Szimplex tábla:

$$\begin{bmatrix} 3 & u*_5 & u_1 & u_4 & b \\ x_2 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 \\ u_2 & \frac{17}{15} & -\frac{1}{3} & -\frac{22}{15} & \frac{206}{5} \\ u_3 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{26}{5} \\ x_3 & -\frac{8}{15} & \frac{1}{3} & \frac{28}{15} & \frac{16}{5} \\ x_1 & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{14}{5} \\ z_1 & \frac{13}{6} & -\frac{13}{6} & -\frac{22}{3} & -25 \\ z_2 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{34}{5} \\ z_3 & \frac{7}{5} & -1 & -\frac{17}{5} & -\frac{22}{5} \\ z* & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az errl leolvasható megoldás:

$$x_1 = \frac{14}{5}, x_2 = 1, x_3 = \frac{16}{5}, \text{"célfüggvények:"} \left(z_1 = 25, z_2 = \frac{34}{5}, z_3 = \frac{22}{5} \right)$$

abra3dMulti( );



Az ábrából is láthatón minden célfüggvény az $\left[x_1 = \frac{14}{5}, x_2 = 1, x_3 = \frac{16}{5}\right]$ pontban veszi fel maximumát az alábbi értékekben:

$$z_1 = 25, z_2 = \frac{34}{5}, z_3 = \frac{22}{5}$$

z_2-nek van alternatív optimuma, síkja egybe esik a tartomány egyik határoló vonalával. (Ez az ábra - egér huzogatással történ - nézpont változtatásával látható jól.)

Összefoglalva:

Tanulság: A többcélú optimalizálási feladat grafikusan szemléltetve annyiban különbözik csak az "egycélú" feladattól, hogy több célfüggvény egyenes jelenik meg a megengedhet megoldások tartományán. Ezek egyedi optimumai különböz pontok lehetnek, de egybe is eshetnek. Kereszttáblázatban adhatjuk meg az egyedi optimumok és a többi célfüggvénynek az adott célfüggvény optimalitási helyén felvett értékeit.
Ezen táblázat jó áttekintést ad arról, hogy mennyire azonos vagy különböz jellegek céljaink, ez azonban - az esetek többségében - nem szolgáltat megoldás javaslatot.
Megismertük még az abszolút optimum fogalmát, mely - ritkán létez - olyan megoldási eset, amikor az összes célfüggvény ugyanabban a pontban veszi fel optimumát. Ezt két és három dimenzióban grafikusan is reprezentálni tudtuk.

Súlyozás módszere:

Következ ötletünk lehetne a célfüggvények helyettesítése egyetlen, súlyokkal történ aggregálással kapott célfüggvénnyel.(Ez matematikailag a célfüggvények súlyokkal szorzását majd összeadását jelenti.)

Az ötlet jó, ha le tudjuk küzdeni az alábbi nehézségeket. Amennyiben a célfüggvények dimenziója és/vagy nagyságrendje különböző akkor az aggregálás – szemléletünkkel belátható módon – nem hozhat jó eredményt. Különböz dimenziójú mennyiségek ugyanis nem adhatóak össze, a különböz nagyságrend pedig a súlyok érvényesülését akadályozza meg. Lássuk az alábbi példát:

Példa a dimenziótlan egyre normált célfüggvények súlyozásával kapott aggregált célfüggvény módszerének használatára.

Legyen az alábbi többcélú optimalizálási feladatban az els célfüggvény dimenziója [ezer USD] a másodiké [ezer Foruint], a harmadiké pedig [milliárd tonna].

$$-2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 8,$$
$$x_1 - 4 \cdot x_2 \le 80,$$
$$\frac{5}{4} \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 \le 44$$
$$x_1 + 4 \cdot x_2 \le 16$$

$$z_2 = -4\,x_1 + 5\,x_2 = \text{max.} \qquad [\mathit{ezer\ USD}]$$
$$z_1 = 300\,000\,x_1 + 800\,000\,x_2 = \text{max.} \qquad [\mathit{ezer\ Ft}]$$
$$z_3 = 0.0000025\ x_1 - 0.000002\ x_2 = \text{max.} \qquad [\mathit{milliárd\ tonna}]$$
ahol x_1, x_2 nem negatívak

Mj: az együtthatók a nagyságrendi problémájának megjelenítése okán lettek így megválasztva. (Természetesen 0.000 002 5 milliárd tonna helyett írhattunk volna 500 tonnát.)
Ekkor aggregált célként azt jelölve meg, hogy az els célfüggvény 50%-os súllyal a második és a harmadik pedig 25 – 25%-os súllyal essen a latba az alábbiakat kell megtennünk:

Mivel különböz dimenziójú mennyiségek nem adhatóak össze, így mindegyik célfüggvényt dimenziótlanítani szükséges. Dimenziótlanná egy vonatkoztatási mennyiséggel történ osztás segítségével válhat legkönnyebben egy mennyiség. Ez pedig minden esetben megtehet. (Ez tulajdonképpen a jól ismert százalék!)

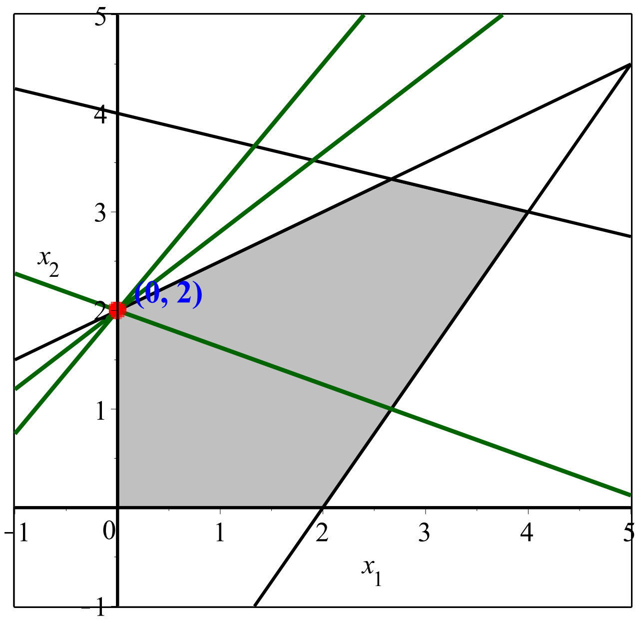
Másik probléma, hogy láthatóan a nagyságrendje sem azonos a három célfüggvénynek. Készítsük el az elz fejezetben már megismert kereszttáblázatot - a Maple optimalizáló algoritmusa segítségével - mindegyik célfüggvényünk maximumát illetve minimumát is.

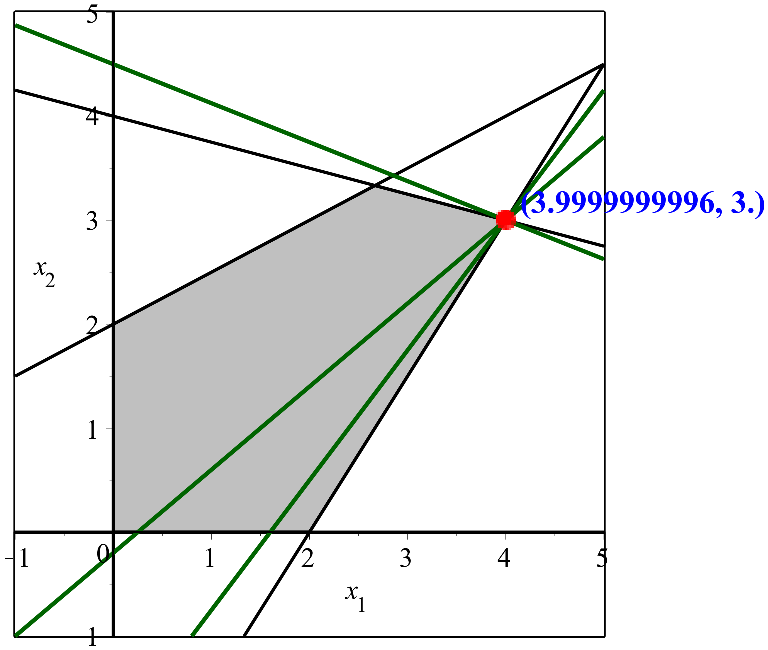
$z_{i\max}$	z_1	z_2	z_3	$\underline{x}_{opt}$			$z_{i\,minimum}$

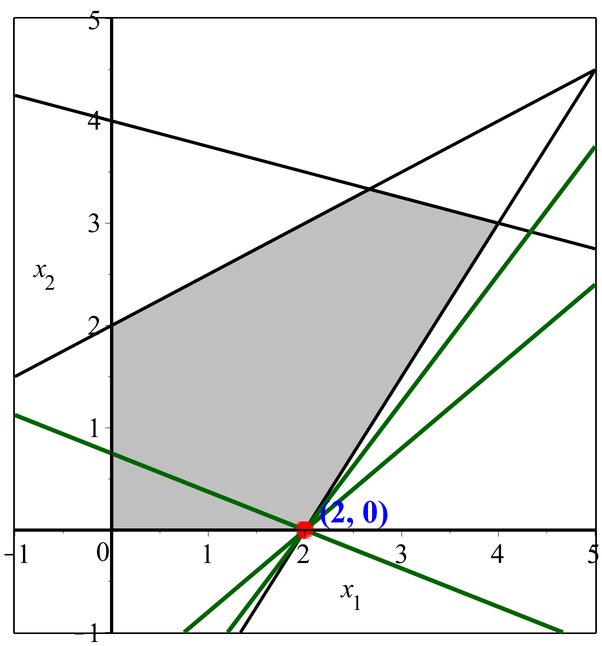
$z_{1\,\max}$	10	1 600 000	−0.000004	[0 , 2]		$z_{1\,\min}$	−8
$z_{2\,\max}$	−1	3 600 000	0.000004	[3.9999999996 , 3]		$z_{2\,\min}$	0
$z_{3\,\max}$	−8	600 000	0.000005	[2 , 0]		$z_{3\,\min}$	−0.000004

Elemezve látható, hogy a célfüggvények különböz pontokban veszik fel maximumaikat. z_1 10-es nagyságrend ($z_{1\,\max}$=10), z_2 milliós ($z_{2\,\max}$ = 3 600 000), z_3 pedig 10^{-6} - os ($z_{3\,\max}$=0.000005) . z_2 minimuma - mivel csak pozitív együtthatójú - számítás nélkül is értheten nulla.
Ezek azok a tartományok melyek között célfüggvényeink változnak. Ha a minimumot a nullába toljuk és ezen tartományokat (maximum - minimum érték) választjuk a fajlagosításhoz referencia értéknek nemcsak dimenziótlanítási célunk, de a nagyságrendek különbözségének problémája is egy csapásra megoldódik!

Grafikus ábrán is megmutathatjuk a maximum helyeket és az optimális célfüggvény egyeneseket, mivel két dimenziós feladatról van szó.







Mj: A számítás részleteit a következ - bezárható - fejezetben találhatják az érdekldk.

Az optimum értékek számításának részletei:

$$-2\cdot x_1+4\cdot x_2\le 8,$$
$$6\cdot x_1-4\cdot x_2\le 12,$$
$$\frac{5}{4}\cdot x_1-10\cdot x_2\le 44,$$
$$x_1+4\cdot x_2\le 16$$

$$\overline{-4\cdot\ x_1+5\cdot x_2,}$$
$$300000\cdot x_1+800000\cdot x_2,$$
$$0.0000025\cdot\ x_1-0.000002\cdot x_2$$

A Szimplex táblák:

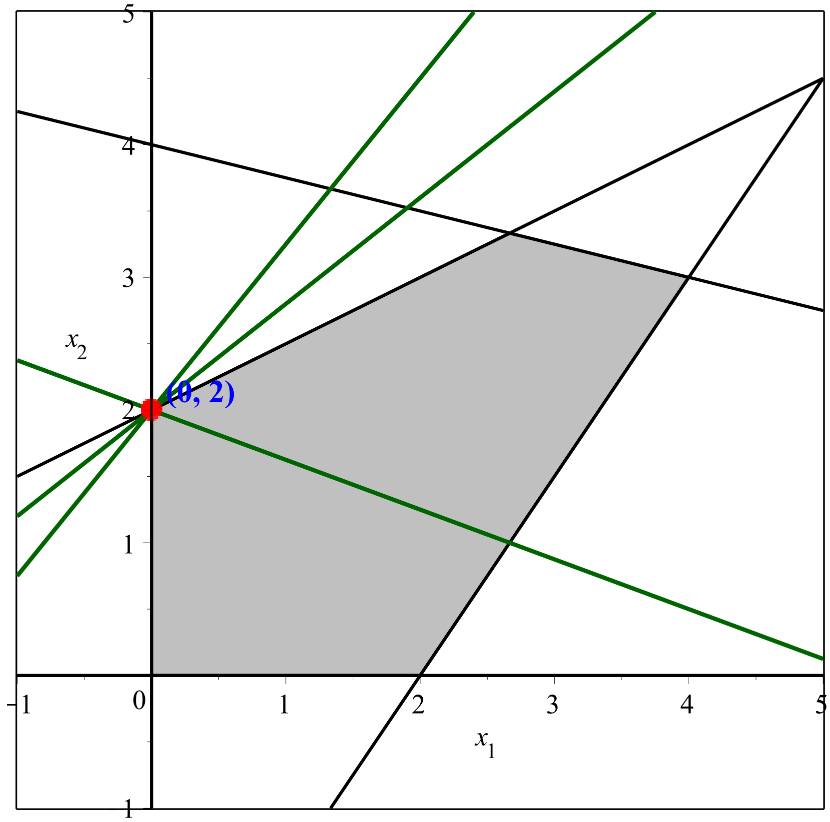
z_1 maximumának számítása:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & -2 & 4 & 8 \\ u_2 & 6 & -4 & 12 \\ u_3 & \frac{5}{4} & -10 & 44 \\ u_4 & 1 & 4 & 16 \\ z_1 & -4 & 5 & 0 \\ z_2 & 300\,000 & 800\,000 & 0 \\ z_3 & 0.0000025 & -0.000002 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_1 & b \\ x_2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 2 \\ u_2 & 4 & 1. & 20 \\ u_3 & -\frac{15}{4} & 2.5 & 64 \\ u_4 & 3 & -1. & 8 \\ z_1 & -\frac{3}{2} & -1.25 & -10 \\ z_2 & 700\,000 & -200\,000 & -1\,600\,000 \\ z_3 & 0.0000015 & 5.00000000000000\ 10^{-7} & 0.000004 \end{bmatrix}$$

z_1 maximuma: :

$$x_1=0,\ x_2=2$$
$$\text{"célfüggvények:"}\ (z_1=10,\ z_2=1600000,\ z_3=-0.000004)$$

grafikonon:
abra2dMultiGoal( );



z_2 maximumának számítása:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & -2 & 4 & 8 \\ u_2 & 6 & -4 & 12 \\ u_3 & \frac{5}{4} & -10 & 44 \\ u_4 & 1 & 4 & 16 \\ z_1 & -4 & 5 & 0 \\ z_2 & 300\,000 & 800\,000 & 0 \\ z_3 & 0.0000025 & -0.000002 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_1 & b \\ x_2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 2 \\ u_2 & 4 & 1. & 20 \\ u_3 & -\frac{15}{4} & 2.5 & 64 \\ u_4 & 3 & -1. & 8 \\ z_1 & -\frac{3}{2} & -1.25 & -10 \\ z_2 & 700000 & -2.00000\ 10^{5} & -1600\ 000 \\ z_3 & 0.0000015 & 5.00000000000000\ 10^{-7} & 0.000004 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & u_4 & u_1 & b \\ x_2 & 0.16666666665 & 0.0833333 & \frac{10}{3} \\ u_2 & -1.3333333332 & 2.3333333 & \frac{28}{3} \\ u_3 & 1.249999999875 & 1.25 & 74 \\ x_1 & \frac{1}{3} & -0.3333333333 & 2.6666666664 \\ z_1 & 0.49999999995 & -1.75 & -6 \\ z_2 & -2.33333333310000\ 10^{5} & 33333.333333 & -\frac{10400000}{3} \\ z_3 & -4.99999999950000\ 10^{-7} & 0.000001 & 0. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & u_4 & u_2 & b \\ x_2 & 0.214285714264286 & -0.0357142857142857 & 3. \\ u_1 & -0.571428571371429 & 0.428571428571429 & 4. \\ u_3 & 1.96428571408929 & -0.535714285714286 & 69. \\ x_1 & 0.142857142895238 & 0.142857142842857 & 3.9999999996 \\ z_1 & -0.49999999995 & 0.75 & 1. \\ z_2 & -2.14285714264286\ 10^{5} & -14285.7142857143 & -3.600000\ 10^{6} \\ z_3 & 7.14285714214287\ 10^{-8} & -4.28571428571429\ 10^{-7} & -0.000004 \end{bmatrix}$$

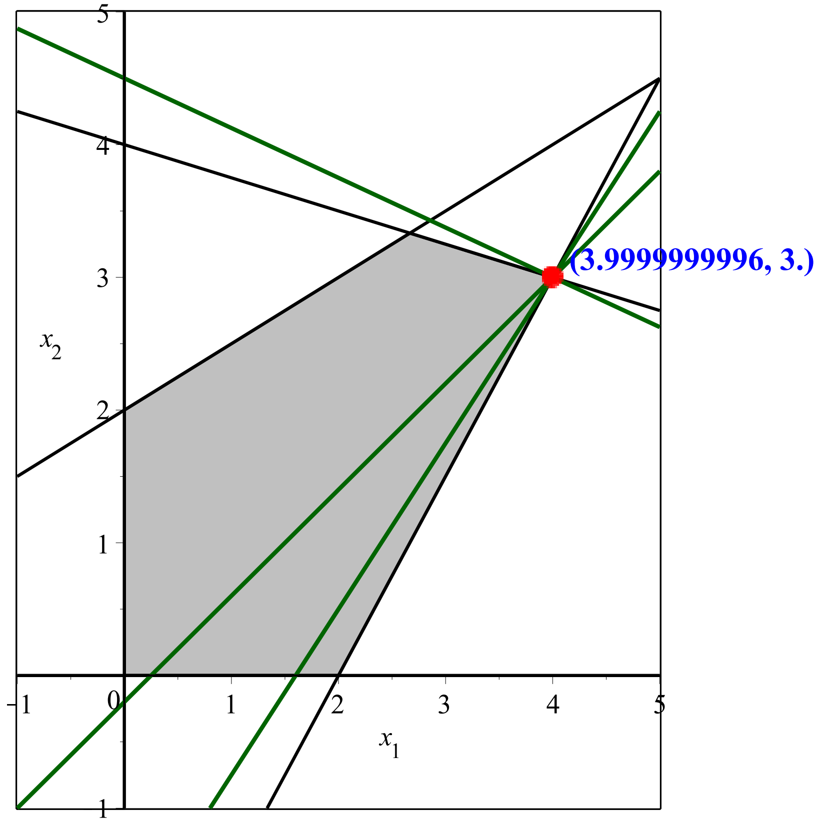
z_2 maximuma:

$$x_1 = 3.9999999996\ , x_2 = 3.$$

$$\text{"célfüggvények:"}\ \left(z_1 = -1.00000000000000, z_2 = 3\ 600\ 000\ , z_3 = 0.000004\right)$$

grafikonon:

abra2dMultiGoal( );



z_3 maximumának számítása:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & -2 & 4 & 8 \\ u_2 & 6 & -4 & 12 \\ u_3 & \frac{5}{4} & -10 & 44 \\ u_4 & 1 & 4 & 16 \\ z_1 & -4 & 5 & 0 \\ z_2 & 300\,000 & 800\,000 & 0 \\ z_3 & 0.0000025 & -0.000002 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_2 & x_2 & b \\ u_1 & 0.3333333334 & \frac{8}{3} & 12 \\ x_1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 2 \\ u_3 & -0.208333333375 & -\frac{55}{6} & \frac{83}{2} \\ u_4 & -0.1666666667 & \frac{14}{3} & 14 \\ z_1 & 0.6666666668 & \frac{7}{3} & 8 \\ z_2 & -50000.00001 & 1000\,000 & -600\,000 \\ z_3 & -4.1666666675\ 10^{-7} & -3.33333333\ 10^{-7} & -0.000005 \end{bmatrix}$$

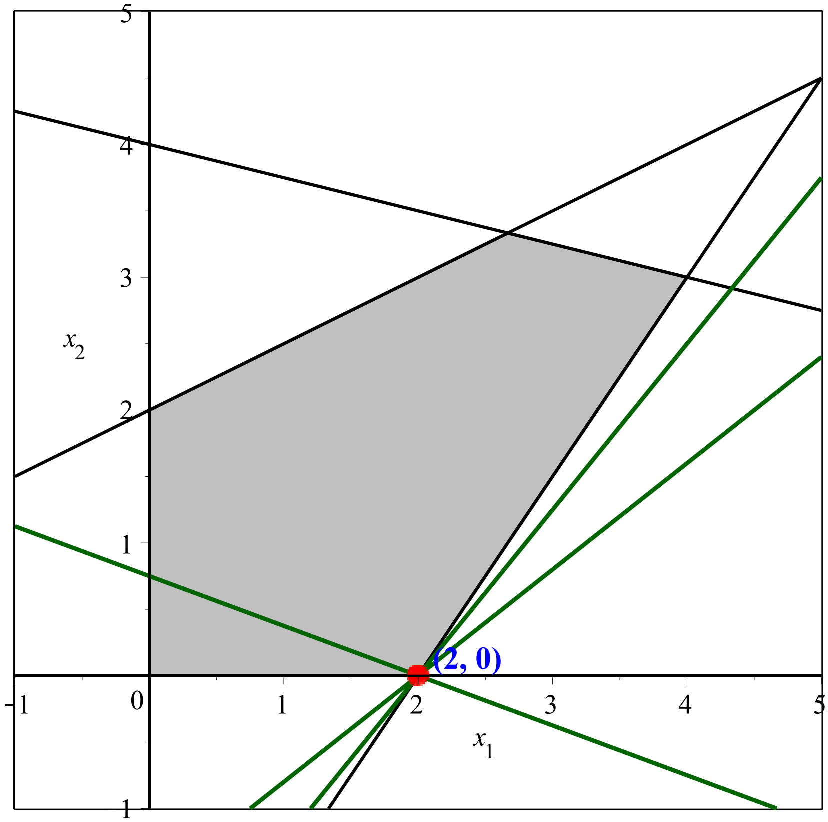
z_3 maximuma:

$$x_1 = 2, x_2 = 0$$

$$\text{"célfüggvények:"}\ \left(z_1 = -8, z_2 = 600000, z_3 = 0.000005\right)$$

grafikonon:

abra2dMultiGoal( );



$z_{i\,\max}$	z_1	z_2	z_3	$\underline{x}_{opt}$		$z_{i\,\min}$	$z_{i\,\min}$
$z_{1\,\max}$	10	1 600 0\ 0\ 0	-0.000004	[0 , 2]	-8	$z_{1\,\min}$	-0.000\ 004
$z_{2\,\max}$	-1	3 600 0\ 0\ 0	0.000004	[3.9999999\ 996 , 3]		$z_{2\,\min}$	0.0\ 000\ 04
$z_{2\,\max}$	-8	600 0\ 0\ 0	0.000005	[2 , 0]		$z_{2\,\min}$	0.0\ 000\ 05

Minimumok meghatározása:
Ekkor a célfüggvények helyett ezek (-1)-el történt megszorzásával kapott függvényeket tekintjük

célnak - z2 kivételével, mivel annak csak pozitív együtthatói vannak - vagyis minimuma nulla!

z_1 minimumának számítása:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & -2 & 4 & 8 \\ u_2 & 6 & -4 & 12 \\ u_3 & \frac{5}{4} & -10 & 44 \\ u_4 & 1 & 4 & 16 \\ z_1 & 4 & -5 & 0 \\ z_2 & 300000 & 800000 & 0 \\ z_3 & -0.0000025 & 0.000002 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_2 & x_2 & b \\ u_1 & 0.3333333334 & \frac{8}{3} & 12 \\ x_1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 2 \\ u_3 & -0.208333333375 & -\frac{55}{6} & \frac{83}{2} \\ u_4 & -0.1666666667 & \frac{14}{3} & 14 \\ z_1 & -0.6666666668 & -\frac{7}{3} & -8 \\ z_2 & -50000.00001 & 1000000 & -600000 \\ z_3 & 4.16666666750000\ 10^{-7} & 3.33333333\ 10^{-7} & 0.000005 \end{bmatrix}$$

z_1 minimuma:

(Vigyázat a (-1) el történt szorzást is tekintetbe kell venni.)

$$x_1 = 2, x_2 = 0$$

$$\text{"célfüggvények:"}\ \left(z_1 = -8, z_2 = 600000, z_3 = 0.000005\right)$$

z_3 minimumának számítása:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & -2 & 4 & 8 \\ u_2 & 6 & -4 & 12 \\ u_3 & \frac{5}{4} & -10 & 44 \\ u_4 & 1 & 4 & 16 \\ z_1 & 4 & -5 & 0 \\ z_2 & 300\,000 & 800\,000 & 0 \\ z_3 & -0.0000025 & 1\,z02 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_1 & b \\ x_2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 2 \\ u_2 & 4 & 1. & 20 \\ u_3 & -\frac{15}{4} & 2.5 & 64 \\ u_4 & 3 & -1. & 8 \\ z_1 & \frac{3}{2} & 1.25 & 10 \\ z_2 & 700\,000 & -0.00\,002 & -1600\,000 \\ z_3 & -0.0000015 & -0.000\,000\,5 & -0.000004 \end{bmatrix}$$

z_3 minimuma:

$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

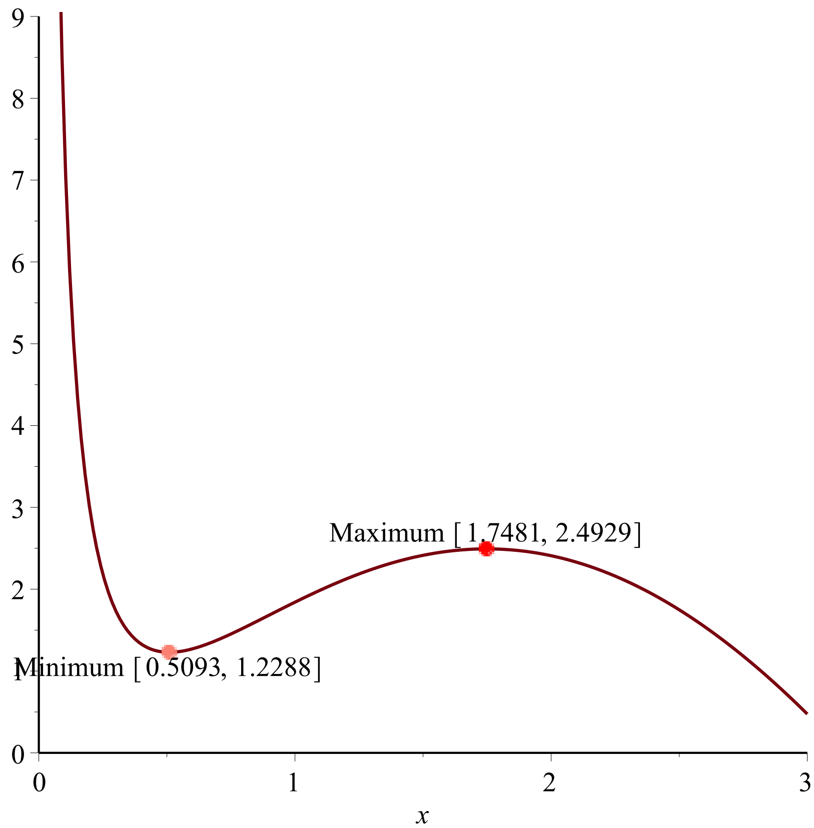
$$\text{"célfüggvények:"}\ \left(z_1 = 10, z_2 = 1600\,000, z_3 = -0.000004\right)$$

Láthatóan z_1 ott veszi fel minimumát ahol z_3 maximumát és fordítva - ami a grafikonból is kitnik.

Grafikusan illusztrálhatjuk a dimenziótlanítás és a nagyságrendi különbségek kezelését - általánosságban :
Bármely függvény megtartja jellegét, akkor is ha értékeit a nulla egy intervallumban veszi csak fel.
Ezt pedig az alábbi módon érhetjük el.
Tekintsünk egy tetszleges (az alábbiakban ugyan a szemleltetéshez konkrétan megadott) függvényt és végezzük el ennek egyre normálását:

$$f = -(x-2)^2 + \sin(x) + \frac{1}{x} + 1$$

Ábrázolva mind az eredeti függvényt $f := \left(-(x-2)^2 + \sin(x) + \frac{1}{x} + 1\right)$: minimum és maximum helyének és értékének megjelenítésével:



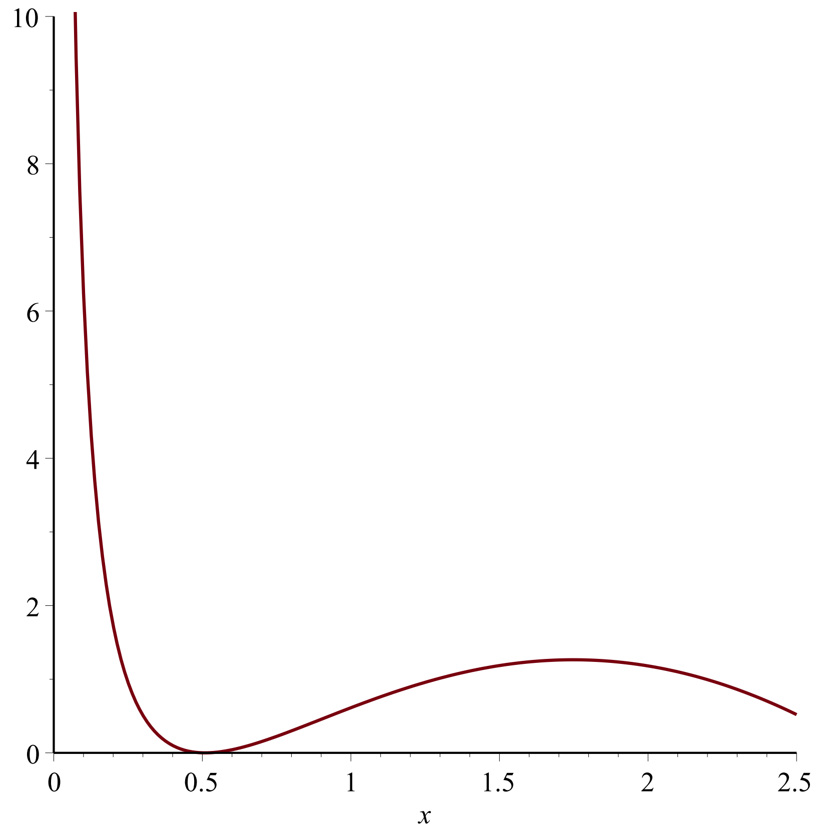
A fenti [0 , 2.5] intervallumban értelmezett függvény csak szemléltetése gondolatmenetünk általános voltának, mivel esetünkben célfüggvényeink természetesen lineárisak. f érték készletének eredeti [f min , f max] közötti értékeit úgy tudjuk a [0 , 1] intervallumra transzformálni, hogy elször kivonjuk a függvény minimumát minden értékébl, majd az - akkor már nullától induló - értékeket értékkészletének nagyságával (f min - f max) leosztjuk – ezzel 1-re normáljuk.
Utóbbi lépésünkkel a függvény dimenziótlanná is válik, mivel így – az érték készletének dimenziójával - azonos dimenziójú mennyiségre vonatkoztatjuk. (Ez ugye a jól ismert % képzés!)
A dimenziótlan egyre normált függvényt ^ jellel (kalap) különböztetjük meg

$$f^{\wedge} = -0.7911017445\ (x-2)^2 + 0.7911017445\ \sin(x) + \frac{0.7911017445}{x} - 0.1810507367$$

A minimumával lefelé tolt függvény képe:

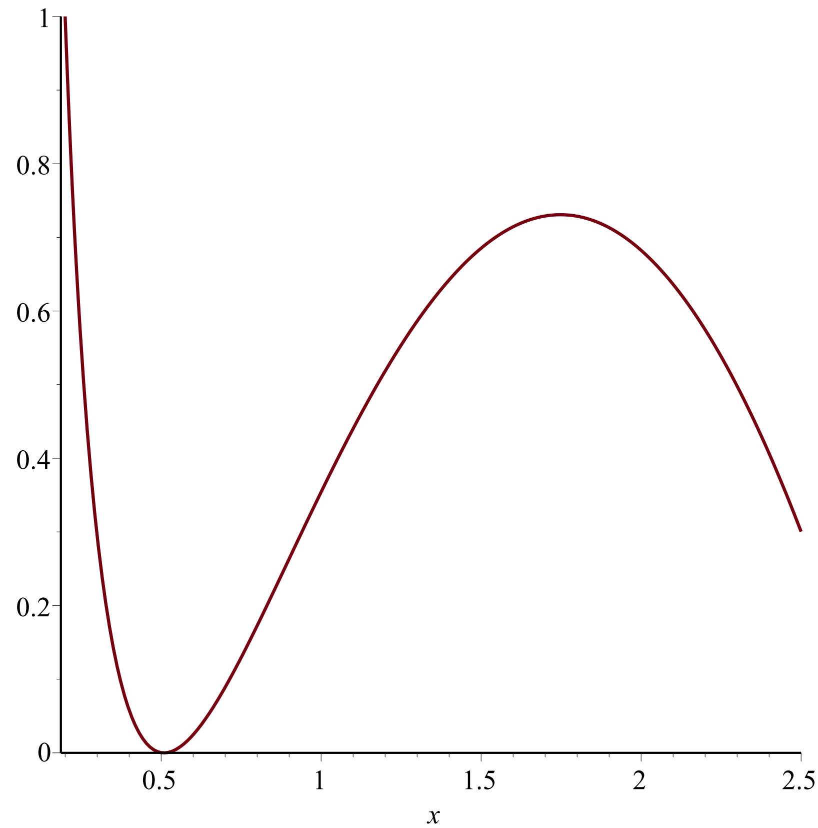
$$fplot := plot\left(\left(-(x-2)^2 + \sin(x) + \frac{1}{x} + 1 - fmin\right), x = 0..2.5\right) :$$

$$plot\left(\left(-(x-2)^2 + \sin(x) + \frac{1}{x} + 1 - fmin\right), x = 0..2.5\right);$$



Az egyrenormált függvény nagyított képe:

$$plot\left(\frac{\left(-(x-2)^2+\sin(x)+\frac{1}{x}+1-fmin\right)}{fmax-fmin}, x=0.2\,..2.5\right);$$



Ugyanezen eljárás alkalmazandó a lineáris célfüggvényekre is. A minimum és maximum értékeket pedig már meghatároztuk, ezeket a fenti táblázat tartalmazza. Így az egyre normált célfüggvények számíthatóak, az alábbiakban:

$$z_i^{\wedge} = \frac{z_i - z_{i\,\min}}{z_{i\,\max} - z_{i\,\min}};$$

$$z1normal := \frac{(-4\cdot x_1 + 5\cdot x_2 - -8)}{(10 - -8)} :$$

$$z2normal := \frac{(300000\cdot x_1 + 800000\cdot x_2 - 0)}{(3600000 - 0)} :$$

$$z3normal := \frac{(0.0000025\cdot x_1 - 0.000002\cdot x_2 - -0.000004)}{(0.000005 - -0.000004)} :$$

$$z1normal = \frac{300000}{5099987}\,x_1 + \frac{800000}{5099987}\,x_2,$$

$$z2normal = -\frac{1}{15}\,x_1 + \frac{8}{3}\,,$$

$$z3normal = 0.2777777778\, x_1 - 0.2222222222\, x_2$$

A rendre 0,5 ; 0,25 ; 0,25súlyokkal képzett célfüggvény pedig:

$ze := 0.5 \cdot z1normal + 0.25 \cdot z2normal + 0.25 \cdot z3normal;$

$$-0.02083333332\, x_1 + 0.1388888889\, x_2 + 0.3333333333 \qquad \textbf{(4.1)}$$

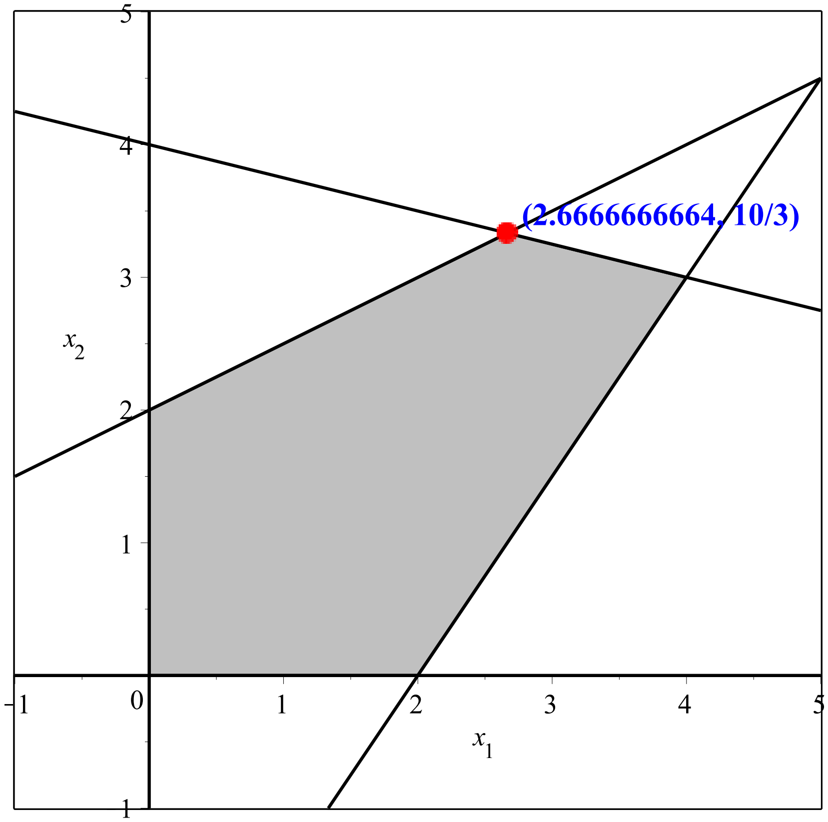
Ezt tekintve egyetlen célfüggvénynek és megoldva ezt az LP feladatot:

$$-2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 8,$$
$$6 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 \leq 12,$$
$$\frac{5}{4} \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 \leq 44,$$
$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 16$$

$$z = -0.02083333332\, x_1 + 0.1388888889\, x_2$$

Az optimális pont és az ered célfüggvény érték:

$$x_1 = 2.6666666664,\ x_2 = \frac{10}{3},$$
$$\text{"célfüggvények:"}\ (z_1 = 0.4074074075)$$



Láthatóan célfüggvényünk egy "kompromisszumot valósított meg" a "maximumok között félúton elhelyezked, közbens" pontot szolgáltatott.

Az optimális megoldás megkeresésének részletei az alábbi - bezárható - fejezetben találhatóak.

Az aggregált célfüggvénnyel történt megoldás részletei

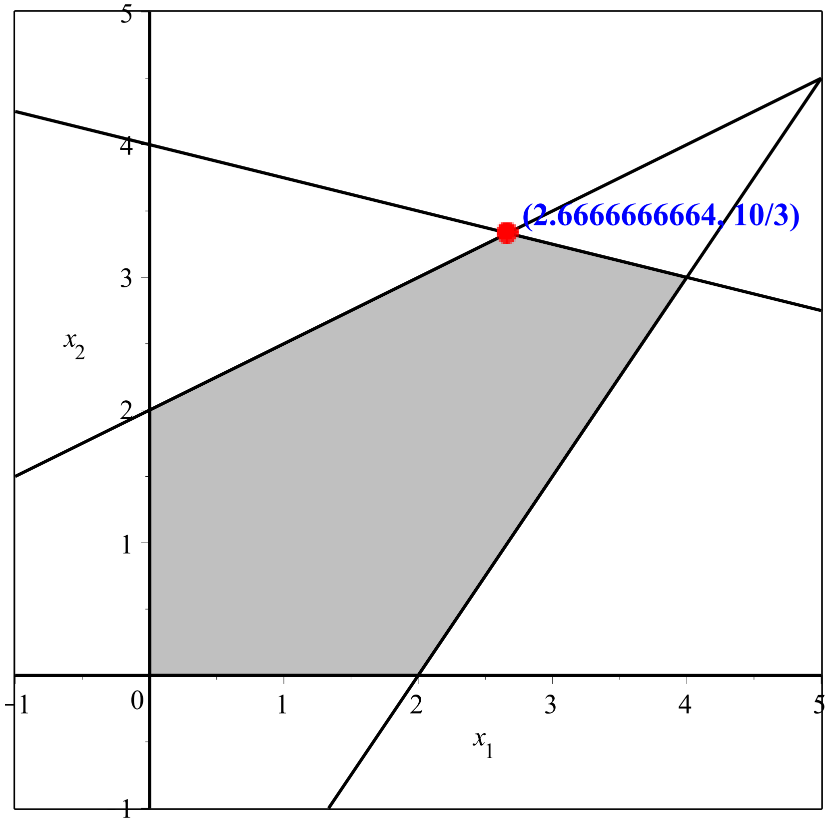
A Szimplex táblák:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & -2 & 4 & 8 \\ u_2 & 6 & -4 & 12 \\ u_3 & \frac{5}{4} & -10 & 44 \\ u_4 & 1 & 4 & 16 \\ z_1 & -0.02083333332 & 0.1388888889 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_1 & b \\ x_2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 2 \\ u_2 & 4 & 1. & 20 \\ u_3 & -\frac{15}{4} & 2.50000000000000 & 64 \\ u_4 & 3 & -1. & 8 \\ z_1 & 0.04861111112 & -0.0347222222250000 & -0.2777777778 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & u_4 & u_1 & b \\ x_2 & 0.16666666665 & 0.08333333 & \frac{10}{3} \\ u_2 & -1.3333333332 & 2.33333333 & \frac{28}{3} \\ u_3 & 1.249999999875 & 1.25 & 74 \\ x_1 & \frac{1}{3} & -0.3333333333 & 2.6666666664 \\ z_1 & -0.0162037037050463 & -0.018518518515 & -0.4074074075 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 2.66666666640000,\ x_2 = \frac{10}{3},\ \text{"célfüggvények:"}\ \left(z_1 = 0.4074074075\right)$$



Demonstrálandó a megoldás jóságát, milyenségét, számítsuk ki az eredeti célfüggvények értékeket ebben az aggregált célfüggvény számára optimális pontban:

$$z_{1\,\mathbf{in}\,z\,e} = \frac{26}{3} = 8\,\frac{2}{3}$$

$$z_{3\,\mathbf{in}\,z\,e} = \frac{9\,800\,000}{3} = 326\,666$$

$$z_{3\,\mathbf{in}\,z\,e} = -0.000\,001\,66$$

Ezek láthatóan tényleg kompromisszumot jelentenek, mert egyedi maximumuknál kisebb értékek. z_1 maximumának 86,6 %-a $\left(z_{1\,\%} = \frac{\frac{26}{3}}{10}\right)$, z_2 pedig 9,07% -a $\left(z_{2\,\%} = \frac{326\,666}{3\,600\,000}\right)$ a z_3 pedig 33,2% - a $\left(z_{3\,\%} = \frac{0.000\,001\,66}{0.00\,0005}\right)$.

Korlátok módszere:

Többcélú optimalizálási feladatainknál elvárásaink (minden célfüggvény együttes maximalizálása) olybá tnhetnek, mint egy maximalista szül elvárása gyermekétl, hogy mindenben a lehet legjobbat nyújtsa. E helyett sok esetben célszerbb kiválasztani egy területet, (például egy sportágat, vagy egy tantárgyat) melybl kiválóságra törekvést várunk el, míg a többi területen megelégszünk egy bizonyos szint feletti teljesítménnyel. Mivel a mindenbl kiválót alkotás csak nagyon keveseknek adatik meg, és fizikailag, idben is lehetetlen. (Például: Legalább közepes bizonyítvány, rendszeres edzésre járás, minimális segítés a háztartásban, és maximális eredmények a matematikából (pl. versenyeken.))
Általánosságban, ahelyett hogy elvárnánk, hogy minden célunk maximálisan teljesüljön, bizonyosak adott szint feletti teljesítése mellett igyekszünk egyetlen cél maximális elérésére.
Hogyan lehetne ezt átfogalmazni a matematika területére?

A korlátok módszerének gondolatmenete:
Ezt úgy modellezhetnénk, hogy kiválasztunk egy célfüggvényt, melynek maximumát keressük, a többi célfüggvény legalább adott szintje mellett, vagyis a többi célfüggvénybl korlátot képezünk, mégpedig - egy megadott szint feletti - alsó korláttal. Tekintsük most elbb egy példát, melyet elbb részletesen elemzünk, majd alkalmazzuk rá a korlátok módszerét, majdan az általános matematikai megfogalmazást írjuk fel.

$$9\cdot x_1 + 18\cdot x_2 \le 162,$$
$$x_1 \le 8,$$
$$x_2 \le 6,$$
$$x_1 - 2\cdot x_2 \le 4$$

$$-\ x_1 + 3\cdot x_2,$$
$$3\cdot x_1 + 7\cdot x_2,$$
$$5\cdot\ x_1 - 2\cdot x_2$$

Elször meg kell határoznunk a célfüggvények egyedi maximumait, mivel ezek határozzák meg maximum mekkora alsó korlátot alkalmazhatunk. Ezeknél nagyobb alsó korlát alkalmazása megoldhatatlan feladat megadását jelentené.

Eredményeinket az alábbi táblázatban összegezzük: (a minimumokat is megjelenítjük, melyeket függetlenül számoltunk ki).
(Bázis cserékkel illetve a Maple Optimization package LPSolve eljárásával)

	z1	*z2*	*z3*	*x opt*	z_i min
z1 max	**18**	42	-12	[0 , 6]	- 4
z2 max	12	**60**	18	[6 , 6]	0

z3 max	-2	38	**36**	[8 , 2]	-12

multiObjectInput6( );

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 9 & 18 & 162 \\ u_2 & 1 & 0 & 8 \\ u_3 & 0 & 1 & 6 \\ u_4 & 1 & -2 & 4 \\ z_1 & -1 & 3 & 0 \\ z_2 & 3 & 7 & 0 \\ z_3 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad \textbf{(5.1)}$$

A számítás részletei - ismételten - az alábbi (bezárható) fejezetben találhatók az érdekldk számára.

A példafeladat maximumainak és minimumainak meghatározása

Az induló tábla:

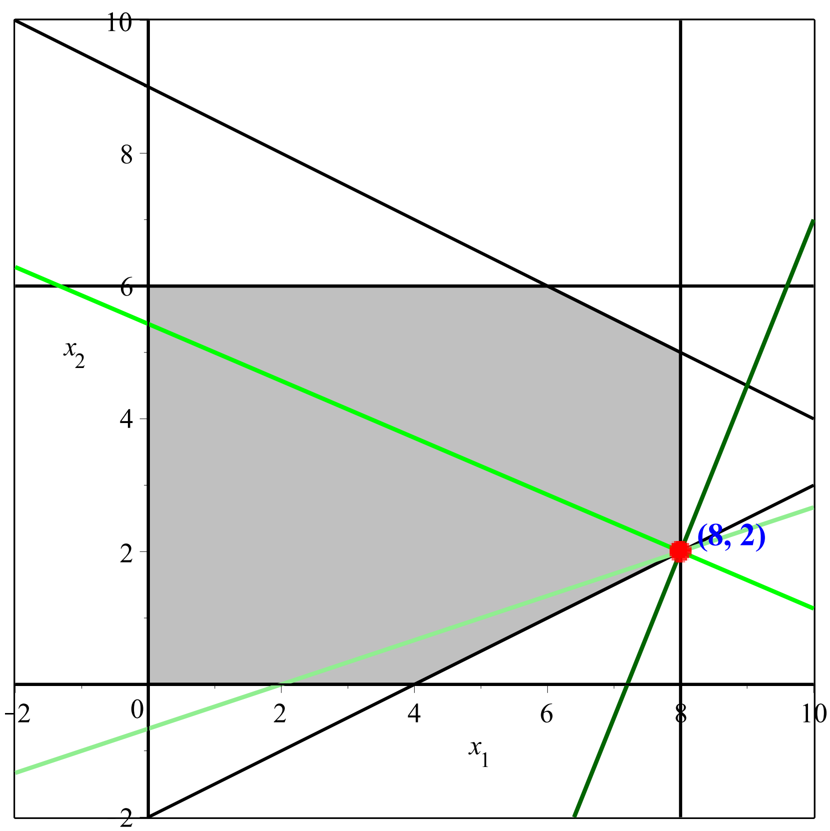
$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 9 & 18 & 162 \\ u_2 & 1 & 0 & 8 \\ u_3 & 0 & 1 & 6 \\ u_4 & 1 & -2 & 4 \\ z_1 & -1 & 3 & 0 \\ z_2 & 3 & 7 & 0 \\ z_3 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

A z3 szerinti optimalizálás, eredmények és vizualizáció:

$bazisChange(u_4, x_1)$, $bazisChange(u_2, x_2)$;
bazisSolution( ), *goalFunctionValues*( );
abra2dMultiGoal3( );
abraz3opt ≔ *abra2dMultiGoal*( ) :
\# $abra2dMultiGoalPoint([x_1 = 4, x_2 = 2])$;
 # ez nem kell csak kipróbáltam mind3 rajzolóval megy hál'Istennek!!

$$\begin{bmatrix} 1 & u_4 & x_2 & b \\ u_1 & -9 & 36 & 126 \\ u_2 & -1 & 2 & 4 \\ u_3 & 0 & 1 & 6 \\ x_1 & 1 & -2 & 4 \\ z_1 & 1 & 1 & 4 \\ z_2 & -3 & 13 & -12 \\ z_3 & -5 & 8 & -20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & u_4 & u_2 & b \\ u_1 & 9 & -18 & 54 \\ x_2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ u_3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ x_1 & 0 & 1 & 8 \\ z_1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ z_2 & \frac{7}{2} & -\frac{13}{2} & -38 \\ z_3 & -1 & -4 & -36 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 8, x_2 = 2, \text{"célfüggvények:"} \left(z_1 = -2, z_2 = 38, z_3 = 36\right)$$

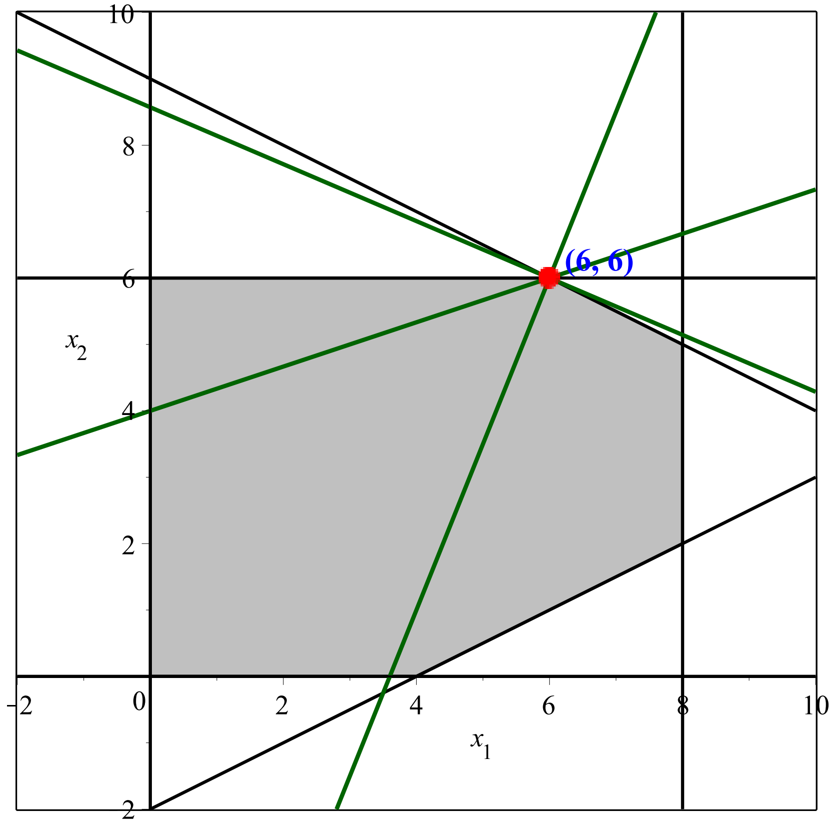


z2 szerinti optimalizálás, eredmények és vizualizáció:

$multiObjectInput6(\ ):$
$bazisChange(u_3, x_2), bazisChange(u_1, x_1);$
$bazisSolution(\ ), goalFunctionValues(\ );$
$abra2dMultiGoal(\ );$
$abraz2opt := abra2dMultiGoal(\ ):$
$\#\ abraz2opt;$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_3 & b \\ u_1 & 9 & -18 & 54 \\ u_2 & 1 & 0 & 8 \\ x_2 & 0 & 1 & 6 \\ u_4 & 1 & 2 & 16 \\ z_1 & -1 & -3 & -18 \\ z_2 & 3 & -7 & -42 \\ z_3 & 5 & 2 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & u_1 & u_3 & b \\ x_1 & \frac{1}{9} & -2 & 6 \\ u_2 & -\frac{1}{9} & 2 & 2 \\ x_2 & 0 & 1 & 6 \\ u_4 & -\frac{1}{9} & 4 & 10 \\ z_1 & \frac{1}{9} & -5 & -12 \\ z_2 & -\frac{1}{3} & -1 & -60 \\ z_3 & -\frac{5}{9} & 12 & -18 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 6, x_2 = 6, \text{"célfüggvények:"}\ (z_1 = 12, z_2 = 60, z_3 = 18)$$

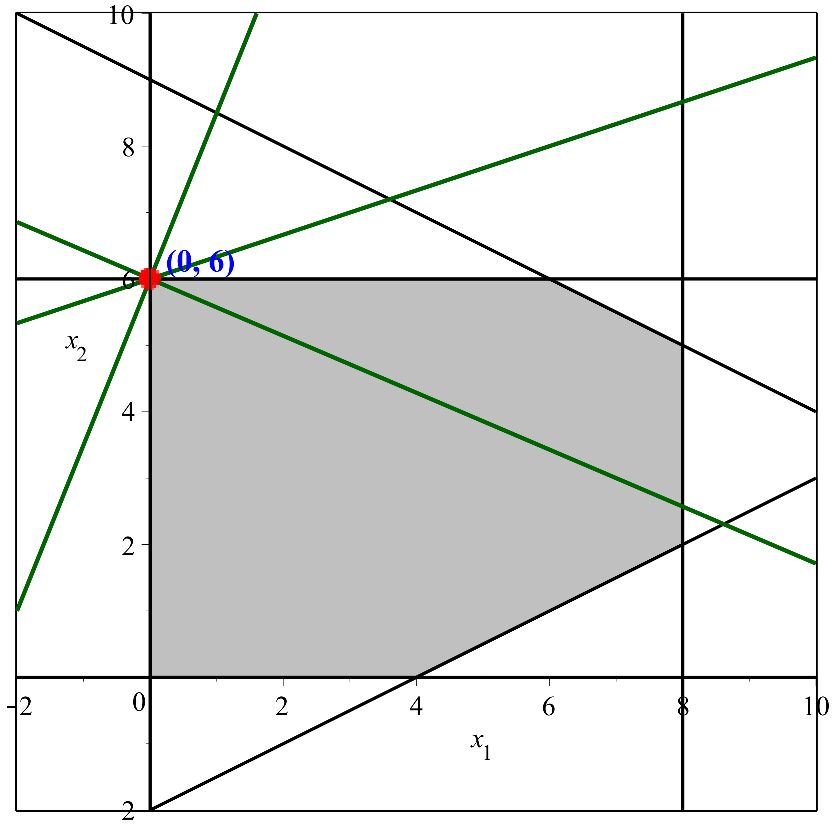


A z1 szerinti optimalizálás, eredmények és vizualizáció:

$multiObjectInput6(\ ):$
$bazisChange\left(u_3, x_2\right);$
$bazisSolution(\ ), goalFunctionValues(\ );$
$abra2dMultiGoal(\ );$
$abraz1opt := abra2dMultiGoal(\ ):$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_3 & b \\ u_1 & 9 & -18 & 54 \\ u_2 & 1 & 0 & 8 \\ x_2 & 0 & 1 & 6 \\ u_4 & 1 & 2 & 16 \\ z_1 & -1 & -3 & -18 \\ z_2 & 3 & -7 & -42 \\ z_3 & 5 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0, x_2 = 6,$ "célfüggvények:" $(z_1 = 18, z_2 = 42, z_3 = -12)$



A minimum számításhoz a célfüggvények mínusz egyszeresét kellett maximalizálnunk. (Ennek részleteit már nem közöljük.)

$z_{1\,\min} = -4$ melyet az $[x_1 = 4., x_2 = 0.]$ pontban vesz fel.

$z_{3\,\min} = 0$ - melyhez nem is szükséges számítás, mivel pozitív együtthatós célfüggvény

minimuma mindig nulla.
$z_{3\,\min} = -12$ melyet az $[x_1 = 0., x_2 = 6.]$ pontban vesz fel.

Alkalmazzuk most a korlátok módszerét, z_3-t tekintve maximalizálandó célként. Legyenek a korlátaink $K_1 = 9$ és $K_2 = 30$. Melyek a lehetséges maximumok 50-50% -ai. (Vagyis az els és második célok lehetséges maximumának "csak a felét fogjuk elérni".)
A feladat kiegészül a két nagyobb egyenls feltétellel,

$$
\begin{gathered}
9\cdot\ x_1 + 18\cdot x_2 \le 162,\\
x_1 \le 8,\\
x_2 \le 6,\\
x_1 - 2\cdot x_2 \le 4\ ,\\
-x_1 + 3\cdot x_2 \ge 9,\\
3\cdot x_1 + 7\cdot x_2 \ge 30\\
\hline
z_3 = 5\cdot x_1 - 2\cdot x_2 = \max.
\end{gathered}
$$

Az induló tábla :
(Az nagyobb egyenls feltételeknél a v_i eltérés változók bevezetésével és az egyenlséges sorokra a szokásos *-os jelölést alkalmazva)

$$
\begin{bmatrix}
0 & v_5 & v_6 & x_1 & x_2 & b\\
u_1 & 0 & 0 & 9 & 18 & 162\\
u_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8\\
u_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6\\
u_4 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4\\
u_5* & -1 & 0 & -1 & 3 & 9\\
u_6* & 0 & -1 & 3 & 7 & 30\\
z_3 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0\\
z* & -1 & -1 & 2 & 10 & 39
\end{bmatrix}
$$

Nem részletezve minden táblát csak az egyenlséges sorok kielégítettségének - a kétfázisú Szimplex módszer els fázisának végét - fázisát megjelenítve:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc} v_5 & v_6 & b \end{array} \\
2 & \\
\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ z_3 \\ z^* \end{array} &
\begin{bmatrix}
-\frac{9}{16} & \frac{45}{16} & \frac{1323}{16} \\
-\frac{7}{16} & \frac{3}{16} & \frac{101}{16} \\
\frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{39}{16} \\
-\frac{13}{16} & \frac{1}{16} & \frac{151}{16} \\
-\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{57}{16} \\
\frac{7}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{27}{16} \\
-\frac{41}{16} & \frac{13}{16} & -\frac{21}{16} \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Azonban további báziscsere szükséges az optimum eléréséhez.

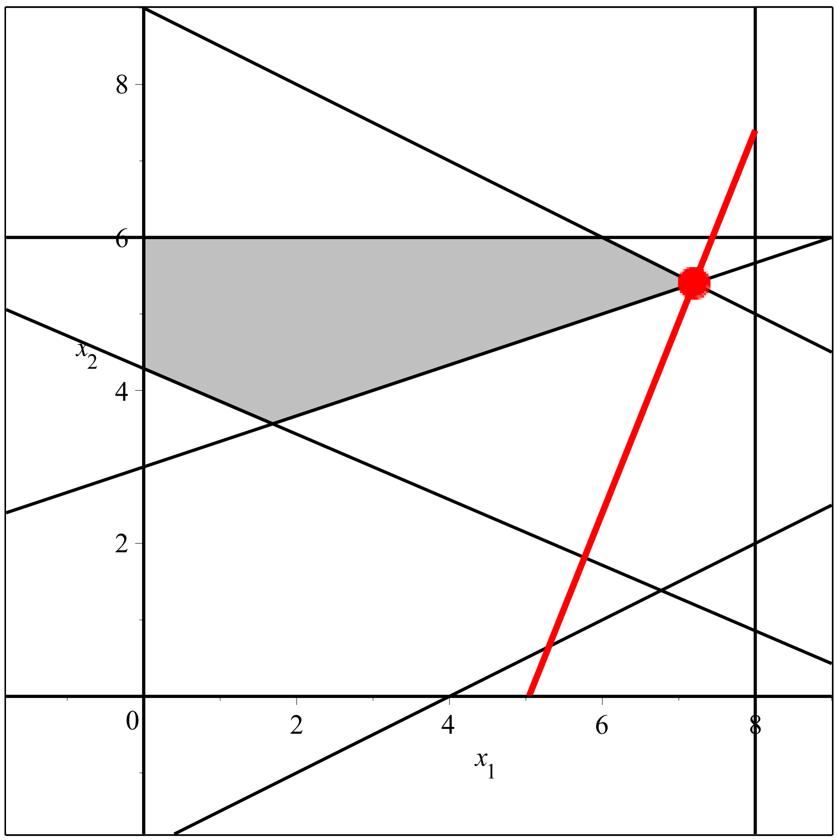
$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc} v_5 & u_1 & b \end{array} \\
3 & \\
\begin{array}{c} v_6 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ z_1 \\ z^* \end{array} &
\begin{bmatrix}
-\frac{1}{5} & \frac{16}{45} & \frac{147}{5} \\
-\frac{2}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{4}{5} \\
\frac{1}{5} & -\frac{1}{45} & \frac{3}{5} \\
-\frac{4}{5} & -\frac{1}{45} & \frac{38}{5} \\
-\frac{1}{5} & \frac{1}{45} & \frac{27}{5} \\
\frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{36}{5} \\
-\frac{12}{5} & -\frac{13}{45} & -\frac{126}{5} \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Az errl leolvasható megoldás:

$$z_3 = \frac{126}{5}$$

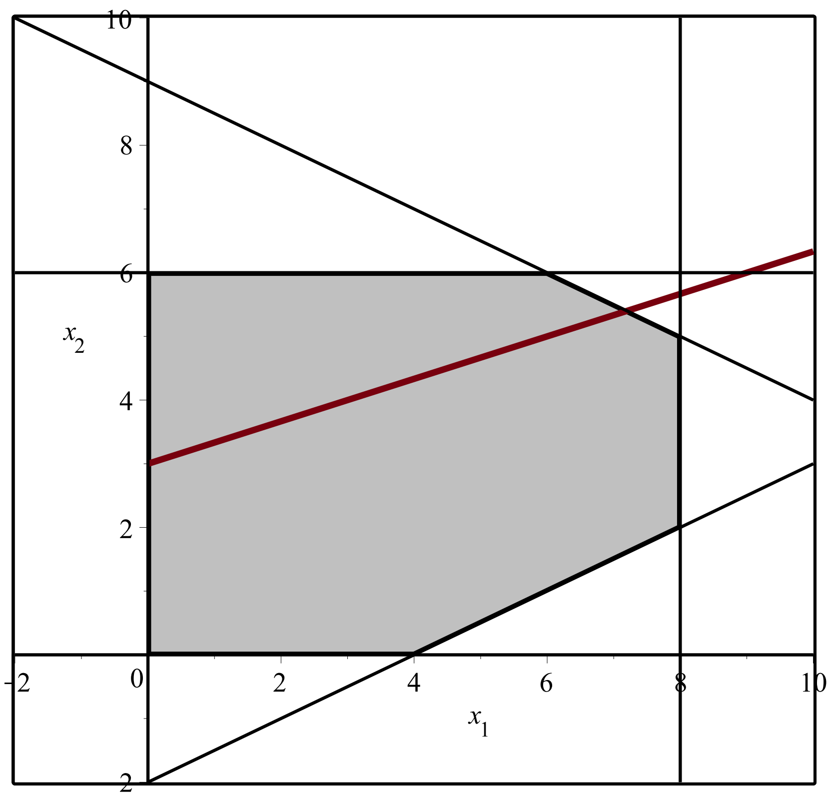
$$x_1 = \frac{36}{5}, x_2 = \frac{27}{5}, \quad v_5 = 0, v_6 = \frac{147}{5}$$

x_1 = 36/5 = 7 1/5 , x_2 = 27/5 = 5 2/5 az alábbi (a nagyobb egyenlséges feltételek által szolgáltatott) tartomány jobb széls pontja!
z_3 = 126/5 = 25 1/5 Ami a lehetséges egyedi maximumnak (30) kb 84 %-a. !



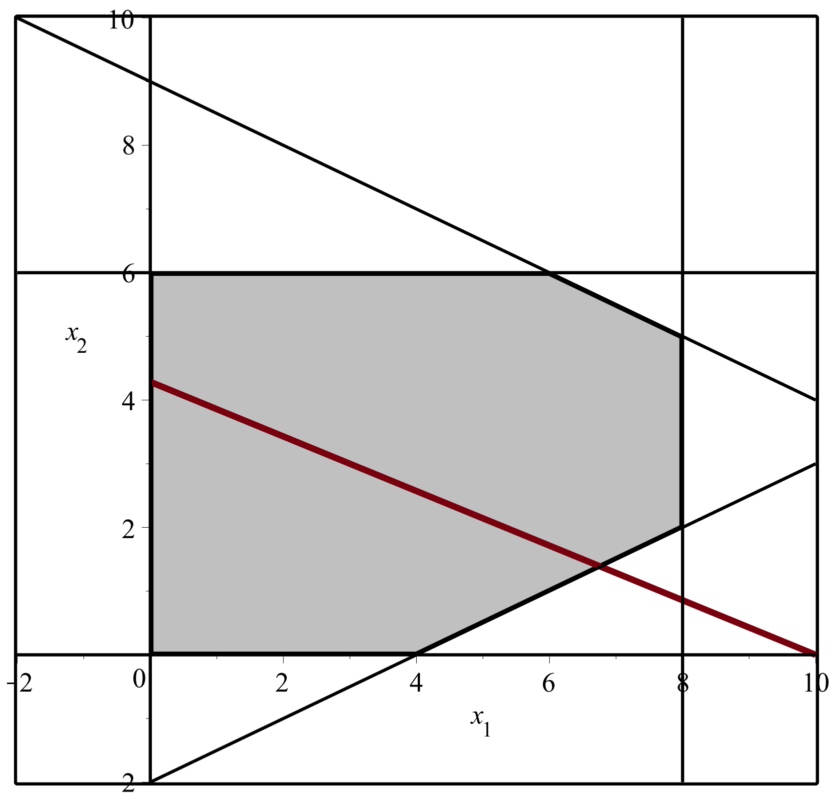
Láthatóan a tartomány leszkült z_3 eddigi maximumát nem tudja elérni, mert az a pont ([8 , 2]) most nem része a tartománynak.
Feladatunkat animáltan is megjeleníthetjük az alábbiakban:
Egyik korlát-célfüggvény emelkedése az origótól a korlát értékig:

$z1cp = 9.0000$

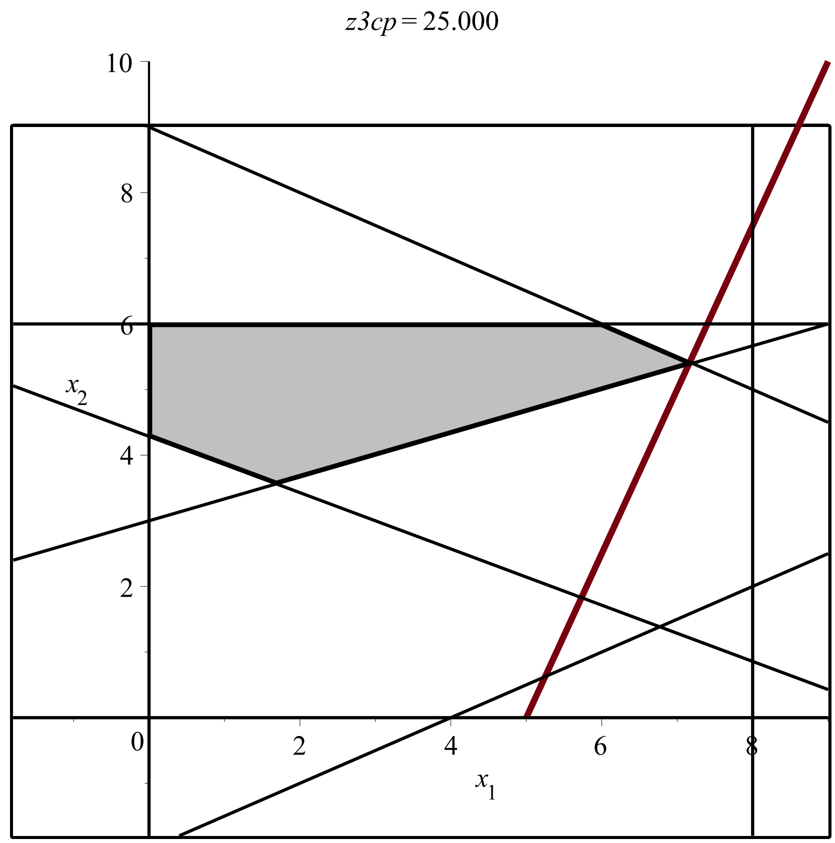


A másik korlát-célfüggvény emelkedése az origótól a korlát értékig:

$z2cp = 30.000$

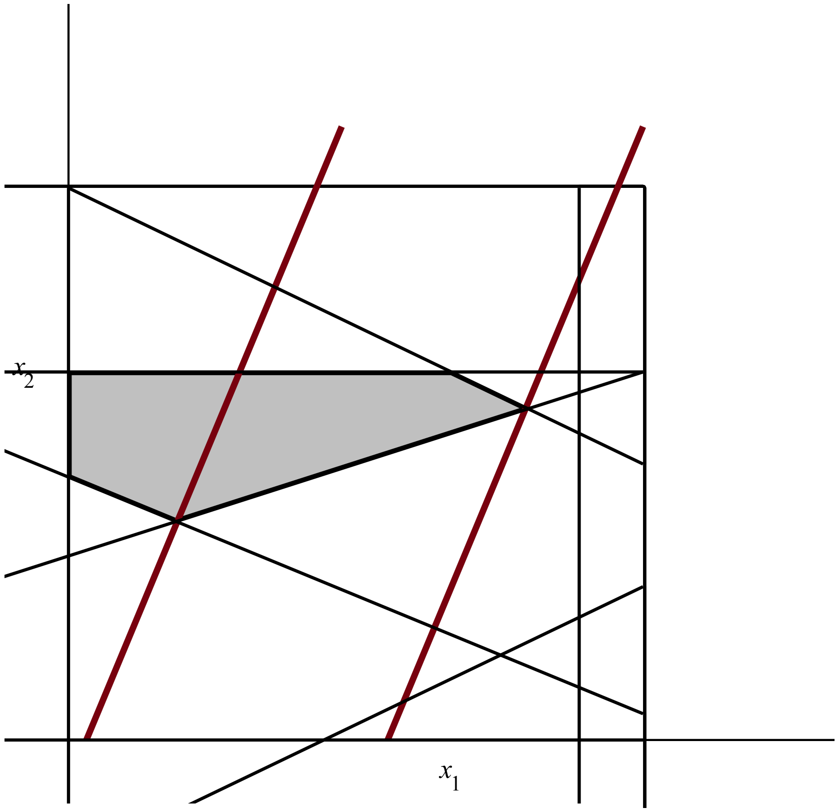


A célfüggvény az alsó korlátokat szolgáltató ponton átmen helyzetétl az optimális helyzetéig:

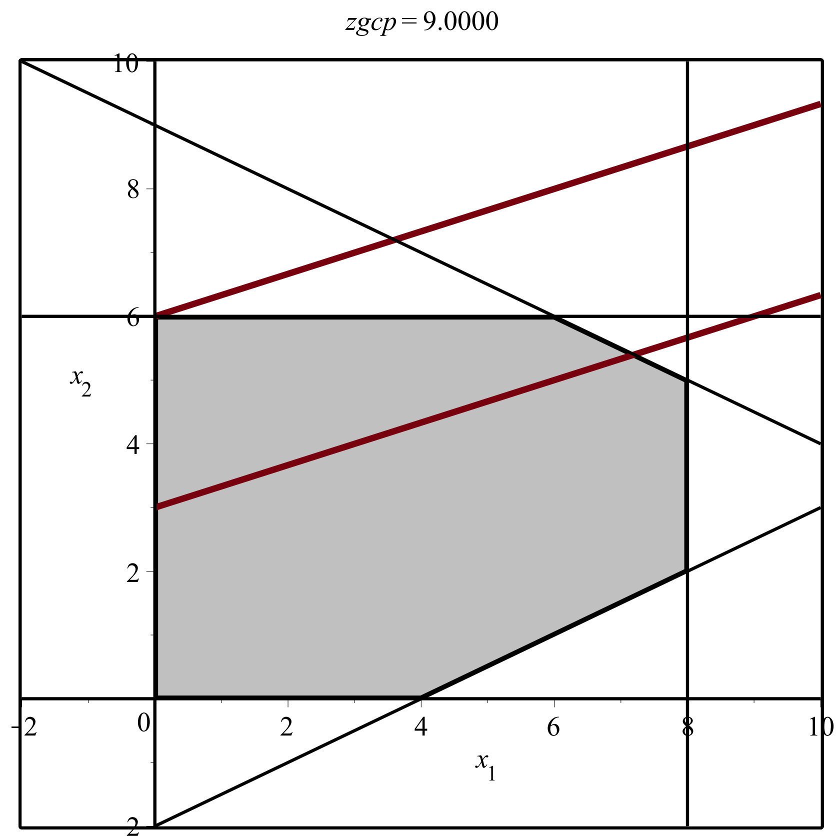


Vagy egyetlen animációként:

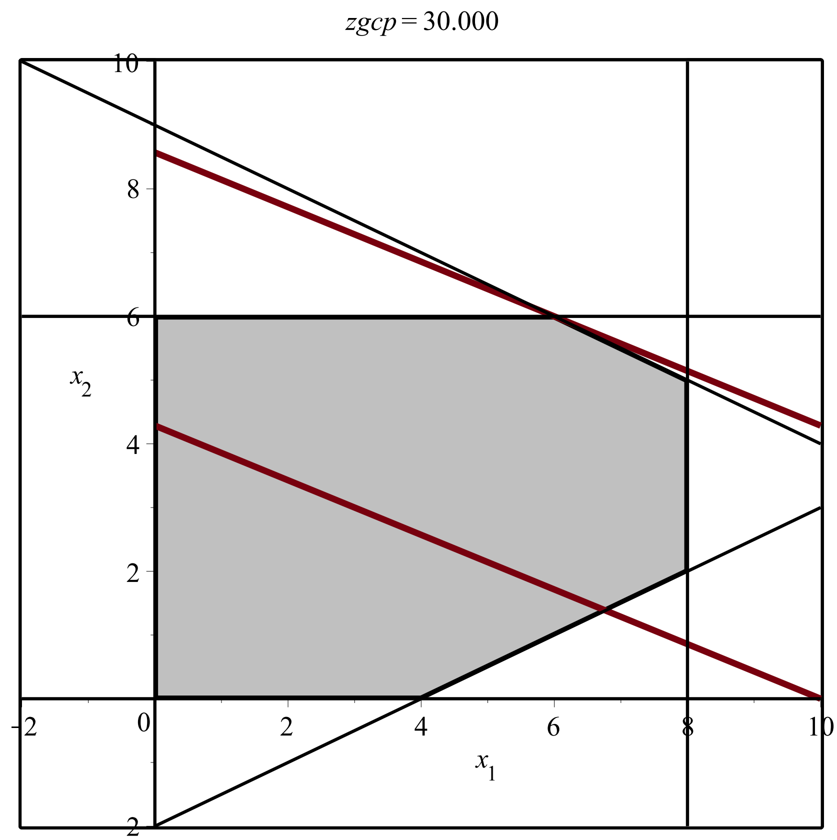
$zgcp = 25.000$



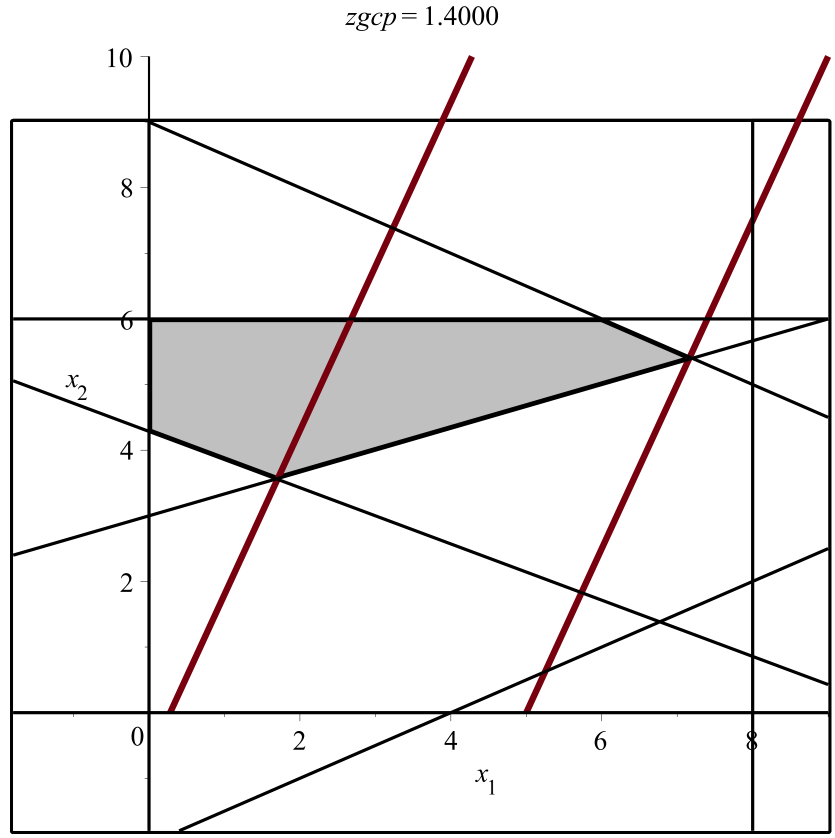
Vagy fordítva, az els célfüggvény optimális helyzetétl visszafelé az alsókorlát helyzetig,



És a második célfüggvény optimális helyzetétl visszafelé az alsókorlát helyzetig,



És a harmadik - továbbra is célfüggvénynek tekintett függvény animálása az optimális helyzetétl vissza a megadott pontig.



Jegyezzük meg ezt a tulajdonságot, hogy az alsó korlátok megadásával tulajdonképpen egy pontot adunk meg, melybe eltolva célfüggvényeinket alkotják a leszkített tartomány határait. (Erre szükségünk lesz a késbbiekben.)

A legkisebb célfüggvény maximalizálásának módszere

Tekintsük az alábbi három célfüggvényes feladatot, melynek szekvenciális optimalizálásos megoldása és három dimenziós ábrái az alábbi bezárható fejezetben találhatóak.

$$2\cdot x_1 - x_2 + 4\cdot x_3 \leq 120,$$
$$2\cdot x_1 + 2\cdot x_3 \leq 40,$$
$$4\cdot x_1 + x_2 + 2\cdot x_3 \leq 80$$

$$z_1 = 3\cdot x_1 + 7\cdot x_2 + 9\cdot x_3,$$

$$z_2 = 7 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3,$$
$$z_3 = 3 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3$$

A legkisebb célfüggvény minimalizálásának elvéhez használt példa szekvenciális optimalizálási módszerrel történ megoldása és grafikonjai

Íjuk most fel azt a modellt melyben minden célfüggvénynek egyetlen azonos ym-el jelölt alsó korlátot adunk és így ezeket - mint a korlátok módszerénél már megyszokhattuk - feltételi egyenletként kezeljük. A célfüggvény pedig ezen egyetlen változó maximalizálása!

$$2 \cdot x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 \le 120,$$
$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_3 \le 40,$$
$$4 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 \le 80$$

$$3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 \ge y_m$$
$$7 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \ge y_m$$
$$3 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 \ge y_m$$

$$\overline{z = y_m = \text{max.}}$$

Ennek Szimplex módszerrel kezelhetvé alakított alakja:

$$2 \cdot x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 \le 120,$$
$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_3 \le 40,$$
$$4 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 \le 80$$

$$-3 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 - 9 \cdot x_3 + y_m \le 0,$$
$$-7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 + y_m \le 0,$$
$$-3 \cdot x_1 - x_2 - 3 \cdot x_3 + y_m \le 0$$

$$\overline{z = y_m = \text{max.}}$$

ahol is nemcsak átvittük az y változót a bal oldalra, de (-1)-el szoroztuk is az egyenltleneséget.

Oldjuk meg most ezt az alábbi Maple input ablakban megadva:

$2\cdot\ x_1 - x_2 + 4\cdot x_3 \le 120,$
$2\cdot\ x_1 + 2\cdot x_3 \le 40,$
$4\cdot\ x_1 + x_2 + 2\cdot\ x_3 \le 80,$
$-3\cdot x_1 - 7\cdot x_2 - 9\cdot x_3 + y \le 0,$
$-7\cdot x_1 + 4\cdot x_2 - 6\cdot x_3 + y \le 0,$
$-3\cdot x_1 - x_2 - 3\cdot x_3 + y \le 0$

y

A tartomány megjelenítéséhez nem szükséges báziscsere végrehajtása, csak - akár az induló tábláról - egyetlen megengedhet megoldás leolvasása a *bazisSolution*( ), *goalFunctionValue*( ); eljárásokkal.
Mj: alábbi megadás lehetséget ad - a tananyagunkban csak érintlegesen szerepl - negatív báziscsere elem választási algoritmus használatára. Ekkor a teljes megoldás végigvihet. Lásd késbb.

multiObjectInputMinGoal( );

$$\begin{bmatrix} 0 & y & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 0 & 2 & -1 & 4 & 120 \\ u_2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 40 \\ u_3 & 0 & 4 & 1 & 2 & 80 \\ u_4 & 1 & -3 & -7 & -9 & 0 \\ u_5 & 1 & -7 & 4 & -6 & 0 \\ u_6 & 1 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.1)}$$

bazisChange(u_6, y), *bazisSolution*( ), *goalFunctionValues*( );

$$\begin{bmatrix} 1 & u_6 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 0 & 2 & -1 & 4 & 120 \\ u_2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 40 \\ u_3 & 0 & 4 & 1 & 2 & 80 \\ u_4 & -1 & 0 & -6 & -6 & 0 \\ u_5 & -1 & -4 & 5 & -3 & 0 \\ y & 1 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ z_1 & -1 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, y=0, x_1=0, x_2=0, x_3=0, \text{"célfüggvények:"}\ \left(z_1=0\right) \tag{6.2}$$

$bazisChange\left(u_2, x_3\right), bazisSolutionV(\ ), goalFunctionValues(\ );$

$$\begin{bmatrix} 2 & u_6 & x_1 & x_2 & u_2 & b \\ u_1 & 0 & -2 & -1 & -2 & 40 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 20 \\ u_3 & 0 & 2 & 1 & -1 & 40 \\ u_4 & -1 & 6 & -6 & 3 & 120 \\ u_5 & -1 & -1 & 5 & \frac{3}{2} & 60 \\ y & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & 60 \\ z_1 & -1 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -60 \end{bmatrix}, y=60, x_1=0, x_2=0, x_3=20, \text{"célfüggvények:"}\ \left(z_1=60\right) \tag{6.3}$$

$bazisChange\left(u_3, x_1\right), bazisChange\left(u_5, x_2\right), bazisSolutionV(\ ), goalFunctionValues(\ );$

$$\begin{bmatrix} 3 & u_6 & u_3 & x_2 & u_2 & b \\ u_1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 80 \\ x_3 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 20 \\ u_4 & -1 & -3 & -9 & 6 & 0 \\ u_5 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} & 1 & 80 \\ y & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & 60 \\ z_1 & -1 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -60 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & u_6 & u_3 & u_5 & u_2 & b \\ u_1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 80 \\ x_3 & -\frac{1}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{1}{11} & \frac{12}{11} & \frac{80}{11} \\ x_1 & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{13}{22} & \frac{140}{11} \\ u_4 & -\frac{29}{11} & -\frac{24}{11} & \frac{18}{11} & \frac{84}{11} & \frac{1440}{11} \\ x_2 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{160}{11} \\ y & \frac{9}{11} & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} & \frac{37}{22} & \frac{820}{11} \\ z_1 & -\frac{9}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{37}{22} & -\frac{820}{11} \end{bmatrix}, y = \frac{820}{11}, x_1 = \frac{140}{11}, x_2 = \frac{160}{11}, x_3 = \frac{80}{11}, goalFunctionValue(\ ) \tag{6.4}$$

goalFunctionValues( );

$$\text{"célfüggvények:"}\ \left(z_1 = \frac{820}{11}\right) \tag{6.5}$$

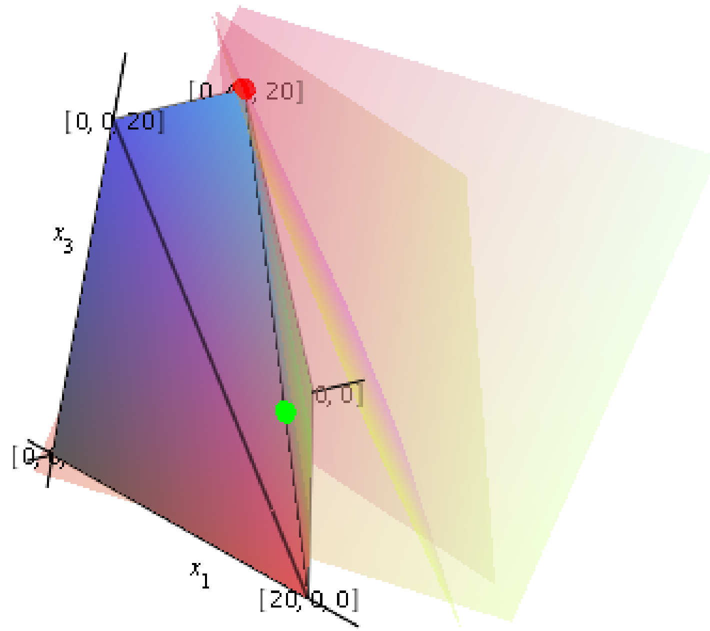
Megkaptuk a legkisebb célfüggvény maximumát, nézzük meg hol helyezkedik el ez a megengedhet megoldások tartományán!
Mj: Ezért készítettük el a bezárható fejezetben található szekvenciális optimalizálási megoldás, illetve fként a megengedhet megoldások tartományt.

Felhasználva most azt és rátéve ezen pontot az ábra:

$$Zminpoint := pointplot3d\left(\left\{\left[\frac{140}{11}, \frac{160}{11}, \frac{80}{11}\right]\right\}, symbol = solidcircle, symbolsize = 25, color = \text{"green"}\right);$$

display(*Graphofgoalfmin*, *Zminpoint*);

$$PLOT3D(...)$$



Ezen módszer szükséges lesz például a játékelméleti feladatok lineáris programozási modelljének megalkotásához - ahol a legkisebb célfüggvény maximuma egyben az összesé is.

A többcélúság általános vizsgálata: (efficiens pont fogalma és meghatározásának egy módja)

Az eddigiekben speciális módszerekkel vizsgáltuk a többcélú optimalizálási feladatot, most nézzük meg általánosságban.

Valós példa, definíciók, (jobb pont, efficiens pont) szemléltetés

Kezdjük ezen vizsgálatot egy köznapi – reméljük – közérthető példával. Ha egy cipőboltban a „számunkra legjobb cipőt” szeretnénk meghatározni belátható, hogy ez legtöbbször nem lehetséges, illetve általában nincs egyetlen ilyen. Lehet találni legjobbat (br, divatos, kényelmes), viszont egyáltalán nem biztos hogy ez a legolcsóbb is... (Vagyis minden

szempontunk nem teljesülhet maximálisan.) Hasonlóan lehet legdivatosabb de mbr, vagy legkényelmesebb mbr, a legdivatosabb br, a legkényelmesebb br, stb.
Gondolkozzunk el még azon is, hogy meg tudjuk-e mondani bármely két lábbelirl, hogy melyik „jobb" melyik elégíti ki jobban (aktuális) igényeinket. Mit teszünk ekkor tulajdonképpen, több adott szempont szerint hasonlítunk össze egyedeket. Ekkor viszont - sok esetben - állást tudunk foglalni melyik jobb, kedvezbb számunkra, néhány esetben viszont nem. (Ezért tart sokáig a vásárlás...)
Vagyis ha több szempont szerint válogatunk, akkor legtöbbször nincs minden szempontból legjobb, mivel az egyes szempontok ki is zárhatják egymást. Lehetnek azonban olyan célok is amelyik „egy felé húznak" vagyis amikor az egyik szempontrendszer értékelése pozitív, vele együtt javul a másik cél is.
Ezen több célt tekintve lokális maximum helyeket „legjobb" „leghatékonyabb" pontokat hívjuk Pareto optimális pontoknak, vagy a lineáris programozásban "efficiens pont"-nak.

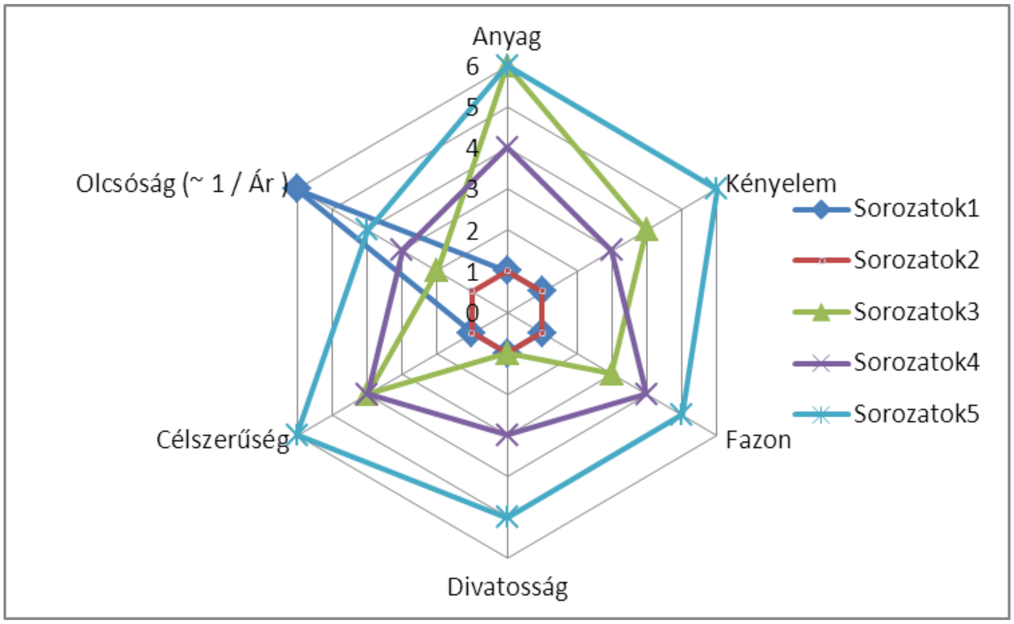
Tekintsünk egy adatbázist, melyben a fent vázolt cipőbolt probléma egy kiragadott – kis számosságú – adatai szerepelnek.
A kiválasztott szempontjainkat és pontozási rendszerünk (1 -6) részleteit az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

Tekintsünk most – az átláthatóság kedvéért csak nagyon kisszámú (5 mintából álló) minta adatbázist. az alábbiakban:

Sorszám	**Jellemz**	**Anyag**	**Kényelem**	**Fazon**	**Divatosság**	**Célszerség**	**Olcsóság (1 / ár)**	**(Ár)**
1	Olcsó rossz	1	1	1	1	1	6	(1)
2	Drága rossz	1	1	1	1	1	1	(6)
3	Kényelmes, br,	6	5	3	1	2	2	(5)

	nem divatos, drága							
4	Közepes	4	3	4	3	4	3	(4)
5	Egész jó, de elég drága	4	4	5	5	4	2	(5)

Ezt megjeleníthetjük sugár diagrammon is:



Ahol kívül vannak a jó egyedek, (pl. 5. termék, világosabb kék) belül pedig a kis pontszámra értékeltek (pl. 2 termék, bordóval jelölve).
Ha páros összehasonlítással kívánjuk kezelni ezen termékeket elmondható, hogy az 2. termék bármely másiknál (például a 3.-nál zöldel jelölt) rosszabb, a 3. és az 5. viszont nem összehasonlítható.

A cipk összehasonlításának részletei:

A 2. termék 5 dimenziós jóság vektora: $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Hasonlóan a 3. termék jóság vektora: $\underline{v}_3 =$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ezek mint vektorok - komponensenként - összehasonlíthatóak: $\begin{bmatrix} 1 < 6 \\ 1 < 5 \\ 1 < 3 \\ 1 = 1 \\ 1 < 2 \\ 1 < 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

vagyis : $\underline{v}_2 < \underline{v}_3$

Az ötödik termék, melynek jóság vektora $\underline{v}_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ azonban nem összehasonlítható a

hármassal, mivel $\underline{v}_3$ az els szempont szerint jobb, a harmadik szempont szerint viszont

rosszabb. Árban viszont egyformák. $\begin{bmatrix} 6 > 4 \\ 5 > 4 \\ 3 < 5 \\ 1 < 5 \\ 2 < 4 \\ 2 = 2 \end{bmatrix}$

Megjegyzés: az összehasonlítás technikája a játékelméletben használt/megismert dominancia módszerrel egyezik meg.

Általánosan felírva:

Az alábbi többcélú optimalizálási feladat esetén

$$\underline{A} \cdot \underline{x} \leq \underline{b} \qquad \underline{x} \geq \underline{0} \quad ; \quad \underline{b} \geq \underline{0} \quad \underline{x} \in R^n \quad ,$$

$\underline{b} \in R^{m} \quad \underline{A} \in R^{(mxn)}$

$$z_1 = \underline{c}_1^{T} \cdot \underline{x} = \max.$$
$$z_2 = \underline{c}_2^{T} \cdot \underline{x} = \max.$$
$$\vdots$$
$$z_k = \underline{c}_k^{T} \cdot \underline{x} = \max.$$

Definíció: x_1 hatékonyabb pont (Jobb pont) mint x_2
ha:

x_1 ; $x_2 \in$ L (L - a megengedhető megoldások tartománya)

és $z_i(x_2) \le z_i(x_1)$ minden i-re (i = 1, ... , k)

valamint létezik $\exists$ i0 hogy $z_{i0}(x_2) \le z_{i0}(x_1)$

Szavakkal:
x_1 pont hatékonyabb, jobb pont mint x_2 pont ha:
mindkett lehetséges pont (eleme a megengedhet megoldások tartományának)
és minden egyes célfüggvény nagyobb vagy legalábbis ugyanakkora értéket ad x_1 -re mint x_2 -re.
Vagyis bármely célfüggvénybe helyettesítjük is x_1 -et az mindig nagyobb vagy egyenl értéket ad mintha x_2 -t helyettesítettük volna. Azonban ha mindegyik célfüggvényre az egyenlőség teljesül – ezt ezen felírásunk megengedné – akkor az nem jobb, csak ugyanolyan pont lenne. Ezért szükséges, hogy kiegészítsük azzal, hogy
valamint legalább egy célfüggvényre a határozottan nagyobbnak kell teljesülnie.

Megjegyzés: Ezen definíciónk nem lineáris célfüggvényekre, st nem lineáris feltételekre is általánosítható az alábbiakban:
Az alábbi többcélú, nem lineáris optimalizálási feladat esetén

$$\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}}) \le \underline{\mathbf{b}} \qquad \underline{x} \ge \underline{0} \quad ; \quad \underline{b} \ge \underline{0} \quad \underline{x} \in R^{n} \;,$$

$\underline{b} \in R^{m} \quad \underline{g}(\underline{x}) \in R^{n} \to R^{m}$

$$f_1(\underline{x}) = \max.$$
$$f_2(\underline{x}) = \max.\ .$$
$$\vdots$$
$$f_k(\underline{x}) = \max.$$

ahol $\underline{g}(\underline{x})$ - nem lineáris (vektor - vektor) függvény

és f_1 , f_2 , … , f_k a nem lineáris (vektor - skalár) célfüggvények.
Ekkor x_1 pont hatékonyabb, jobb pont mint x_2 pont ha:
x_1 ; $x_2 \epsilon L$
és $f_i(x_2) \le f_i(x_1)$ minden i-re (i = 1, ... , k)
valamint létezik ∃ i_0 hogy $f_{i0}(x_2) \le f_{i0}(x_1)$

Mieltt továbbmennénk a gondolatmenettel, tekintsünk egy példát.
x_1 , x_2 nem negatívak

$$\begin{aligned} -2\,x_1 + 4\,x_2 &\le 8 \\ 2\,x_1 - 4\,x_2 &\le 32 \\ 5/4\,x_1 - x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_2 &\le 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 8\,x_1 + x_2 = \max. \\ z_2 &= 2\,x_1 + 6\,x_2 = \max. \\ z_3 &= -2\,x_1 + 3\,x_2 = \max. \end{aligned}$$

Vizsgáljuk a célfüggvények egyedi maximumait. Ehhez a feladat induló táblája:
multiObjectInput9( );

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & -2 & 4 & 8 \\ u_2 & 2 & -4 & 32 \\ u_3 & \frac{5}{4} & -1 & 4 \\ u_4 & 1 & 1 & 10 \\ z_1 & 8 & 1 & 0 \\ z_2 & 2 & 6 & 0 \\ z_3 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7.1.1)}$$

A z1 szerinti optimalizálás:

$$\begin{bmatrix} 1 & u_3 & x_2 & b \\ u_1 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} & \frac{72}{5} \\ u_2 & -\frac{8}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{128}{5} \\ x_1 & \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{16}{5} \\ u_4 & -\frac{4}{5} & \frac{9}{5} & \frac{34}{5} \\ z_1 & -\frac{32}{5} & \frac{37}{5} & -\frac{128}{5} \\ z_2 & -\frac{8}{5} & \frac{38}{5} & -\frac{32}{5} \\ z_3 & \frac{8}{5} & \frac{7}{5} & \frac{32}{5} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & u_3 & u_4 & b \\ u_1 & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{16}{3} \\ u_2 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{104}{3} \\ x_1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{56}{9} \\ x_2 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & \frac{34}{9} \\ z_1 & -\frac{28}{9} & -\frac{37}{9} & -\frac{482}{9} \\ z_2 & \frac{16}{9} & -\frac{38}{9} & -\frac{316}{9} \\ z_3 & \frac{20}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

A megoldás ebbl:

$$x_1 = \frac{56}{9}, x_2 = \frac{34}{3},$$

$$\text{"célfüggvények:"} \left(z_1 = \frac{482}{9}, z_2 = \frac{316}{9}, z_3 = -\frac{10}{9} \right)$$

A z2 szerinti optimalizálás:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_1 & b \\ x_2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 2 \\ u_2 & 0 & 1 & 40 \\ u_3 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 6 \\ u_4 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & 8 \\ z_1 & \frac{17}{2} & -\frac{1}{4} & -2 \\ z_2 & 5 & -\frac{3}{2} & -12 \\ z_3 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & u_4 & u_1 & b \\ x_2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{14}{3} \\ u_2 & 0 & 1 & 40 \\ u_3 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 2 \\ x_1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{16}{3} \\ z_1 & -\frac{17}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{142}{3} \\ z_2 & -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{116}{3} \\ z_3 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

A megoldás ebbl:

$$x_1 = \frac{16}{3}, x_2 = \frac{14}{3}$$

$$\text{"célfüggvények:"}\ \left(z_1 = \frac{142}{3},\ z_2 = \frac{116}{3},\ z_3 = \frac{10}{3}\right)$$

A z3 szerinti optimalizálás:

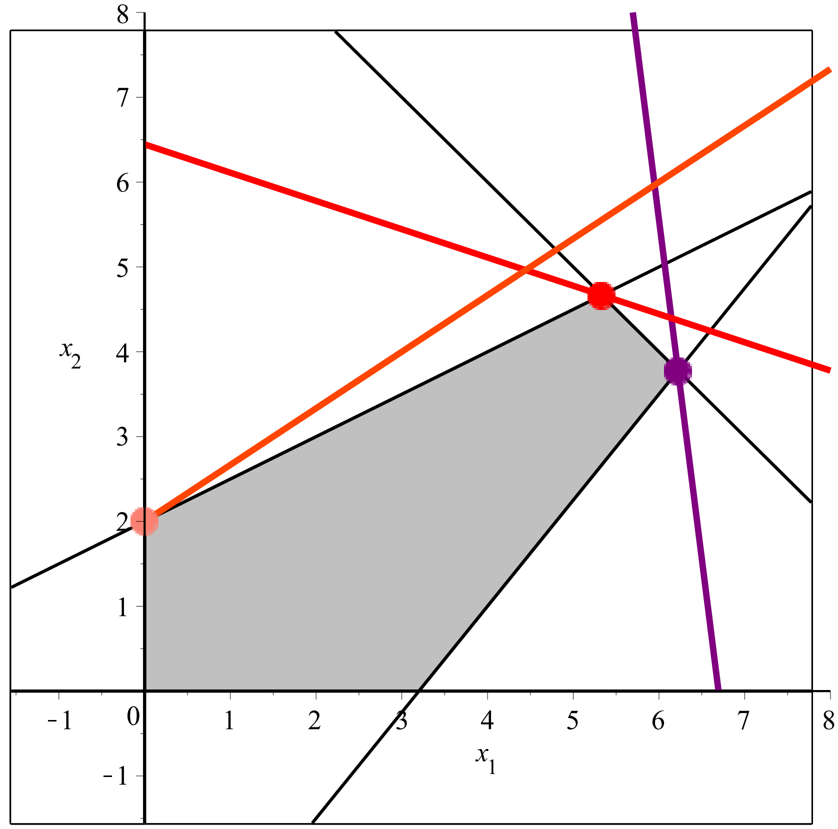
$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & -2 & 4 & 8 \\ u_2 & 2 & -4 & 32 \\ u_3 & \frac{5}{4} & -1 & 4 \\ u_4 & 1 & 1 & 10 \\ z_1 & 8 & 1 & 0 \\ z_2 & 2 & 6 & 0 \\ z_3 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_1 & b \\ x_2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 2 \\ u_2 & 0 & 1 & 40 \\ u_3 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 6 \\ u_4 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & 8 \\ z_1 & \frac{17}{2} & -\frac{1}{4} & -2 \\ z_2 & 5 & -\frac{3}{2} & -12 \\ z_3 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -6 \end{bmatrix}$$

A megoldás:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

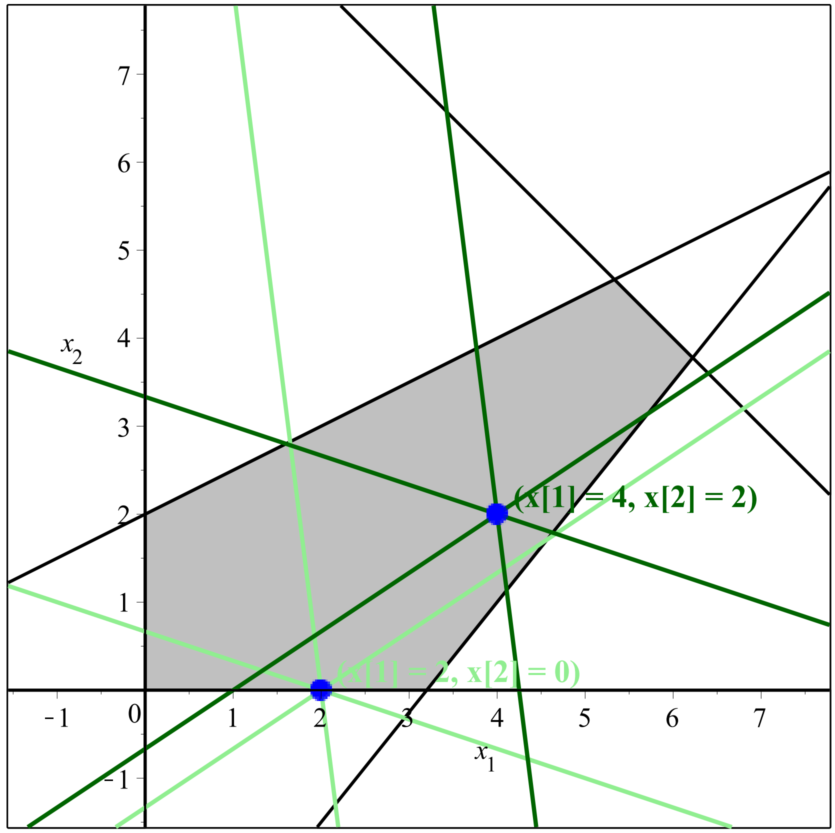
$$\text{"célfüggvények:"}\ \left(z_1 = 2,\ z_2 = 12,\ z_3 = 6\right)$$

A rajzon láthatóan a célfüggvények "három felé húznak" - optimum helyük különböz.
z_1 - narancs, z_2 - piros, z_3 pedig lila színnel jelölve:



Vizsgáljuk meg hogy az $\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ jobb pont-e mint az $\underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ pont.

Elször ellenrizzük, hogy $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$ egyáltalán lehetséges pont-e, melyet legegyszerbben (és leglátványosabban) a tartomány és a pontok felrajzolásával tehetünk meg:



Helyettesítsük be hát mindkét vektort az összes célfüggvénybe:

$$z_1 = 8\,x_1 + x_2$$
$$z_2 = 2\,x_1 + 6\,x_2$$
$$z_3 = -2\,x_1 + 3\,x_2$$

$$z_1(\underline{r}_1) = 16 \quad ; \quad z_1(\underline{r}_2) = 34$$
$$z_2(\underline{r}_1) = 4 \quad ; \quad z_2(\underline{r}_2) = 20$$
$$z_3(\underline{r}_1) = -4 \quad ; \quad z_3(\underline{r}_2) = -2$$

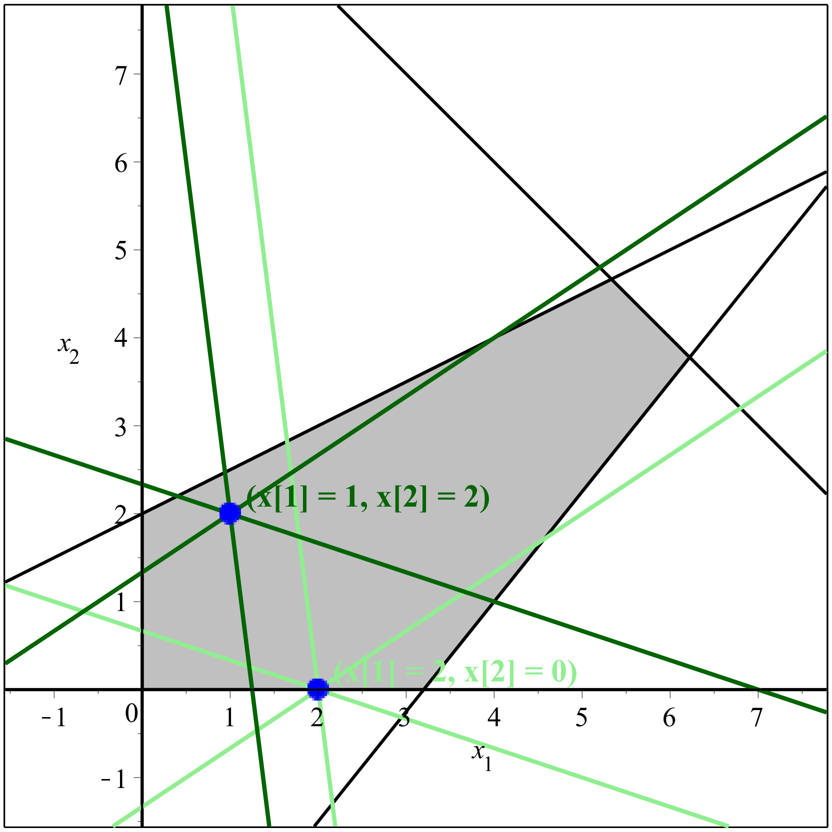
Láthatóan $\underline{r}_2$ –beli célfüggvény értékek határozottan nagyobbak, vagyis az $\underline{r}_2$ pont tényleg jobb pont mint $\underline{r}_1$.

Tekintsük most az $\underline{r}_2$ és $\underline{r}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ összehasonlítást:

$$z_1(\underline{r}_2) = 34 \quad ; \quad z_1(\underline{r}_3) = 10$$
$$z_2(\underline{r}_2) = 20 \quad ; \quad z_2(\underline{r}_3) = 14$$
$$z_3(\underline{r}_2) = -2 \quad ; \quad z_3(\underline{r}_3) = 4$$

Ezek viszont nem összehasonlíthatóak, mivel z_1 és z_2 $\underline{r}_2$ -re szolgáltat nagyobb értéket, míg z_3 $\underline{r}_3$ -ra.
Mj: Az összehasonlítás itt is olyan mint a játékelmélet dominancia módszerénél használt.

Ezen pontokat is grafikonon ábrázolva, a pontokba behúzott célfüggvény egyenesekbl is látható, hogy javultak, vagy romlottak a másik ponthoz képest:



Vagyis vannak összehasonlítható és nem összehasonlítható pontok adott többcélú esetben. Hogyan lehet mégis megfogalmazni legjobb pontok kritériumát matematikailag és köznapi fogalmazásban is.

„Legjobb pont az amelynél nincs jobb pont." Első látásra tautológiának (semmit mondónak, saját értelménél fogva teljesülő) állításnak tűnhet, de mivel a „hatékonyabb (vagy jobb) pontot" már definiáltuk, így ez egzakt megfogalmazás.
Kifejtve „leghatékonyabb, legjobb pont" az, amelyhez nem találunk olyan másik pontot, amelyre legalább egy célfüggvény nagyobb értéket ad, miközben az összes többi célfüggvény nem ad kisebbet.

Matematikai formalizmussal:

Definíció: Efficiens pont(leghatékonyabb, Pareto optimális, "legjobb" pont)

$\underline{x}_e$ efficiens (leghatékonyabb, Pareto optimális, legjobb) pontja egy többcélú optimalizálási feladatnak ha:
$\underline{x}_e \in L$ és $\neg\exists$ (nem létezik) $\underline{x}^* \neq \underline{x}_e$; $\underline{x}^* \in L$, hogy

$z_i(\underline{x}_e) \leq z_i(\underline{x}^*)$ $\forall$ i-re és $\exists$ i0 , hogy $z_{i0}(\underline{x}_e) < z_{i0}(\underline{x}^*)$

Szavakkal:
Egy lehetséges pont akkor efficiens pont, ha nincs nála jobb pont, vagyis nincs olyan pont amelyre minden célfüggvény legalább akkor értéket ad mint $\underline{x}_e$-re,és van egy olyan célfüggvény ami nagyobbat.

Belátható, hogy egy többcélú optimalizálási feladatnak több efficiens, vagyis pareto optimális pontja is lehet.
Nem törekszünk azonban olyan módszer bemutatására, mely az összes meghatározását lehetvé teszi, csak egy úgy nevezett szukcesszív approximációs (rövidebb nevén iterációs) módszert mutatunk be, mely jobb pont és így legjobb pont elállítására alkalmas.

Egy efficiens pont elállításának (iteratív) módszere (jobb pont elállító módszer)

Tekintsük a továbbiakban is az elz fejezetben elemzett példát. Erre a - korábban ismertett - korlátok módszerének módosított felhasználásával egy "jobb pont elállító eljárást" mutatunk be. Melynek matematikai hátterét nem, csak technikáját fogjuk megismerni. (Ez is tanulságokkal szolgál.)
A korlátok módszerét módosítsuk úgy, hogy egy kiválasztott (bels,- vagy határ,-) pont célfüggvénybe történ helyettesítése szolgáltassa az összes célfüggvényre a korlátot. (Vagyis minden célfüggvényt korlátnak tekintünk!) Célfüggvényként pedig az összes célfüggvény egyszer aggregáltját (összegét) tekintjük.
Mj: Mivel ez csak matematikai technikai, segéd céllal tesszük, ezért a dimenziótlanítás most nem szükséges.

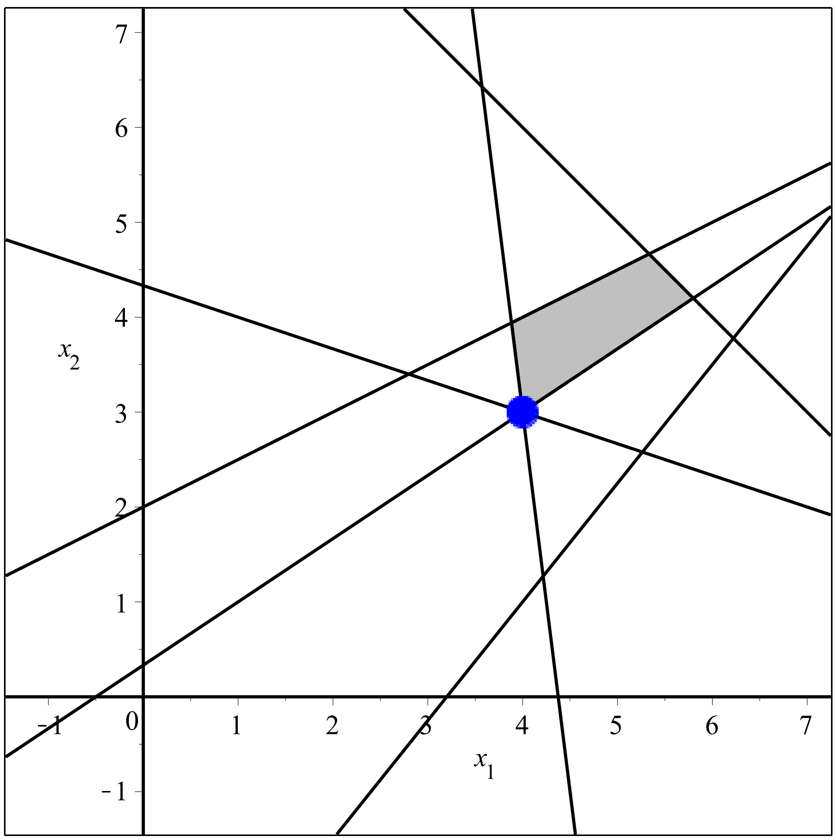
Példánkban legyen ez a pont [4 , 3] -as.
Ekkor $K_1 = 8*4 + 1*3 = 35$ $K_2 = 2*4 + 6*3 = 26$ $K_3 = -2*4 + 3*3 = 1$
Megoldandó feladatunk ekkor:

$$-2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \leq 8,$$
$$2\cdot x_1 - 4\cdot x_2 \leq 32,$$
$$\frac{5}{4}\cdot x_1 - x_2 \leq 4,$$
$$x_1 + x_2 \leq 10,$$
$$8\cdot x_1 + 1\cdot x_2 \geq 35,$$
$$2\cdot x_1 + 6\cdot x_2 \geq 26,$$

$$-2\,x_1 + 3\cdot x_2 \geq 1$$

$$\frac{}{8\cdot x_1 + 10\cdot x_2}$$

A tartomány grafikus ábrázolása : Kékkel szerepel rajta a "korlátként" választott pont, melyen átmennek a célfüggvények egyenesei.
Mj: Közismert, hogy egyenes egyenletébe adott pontot helyettesítve és a kapott értéket az egyenlet jobb oldali konstans értékeként használva ezen egyenlet írja le az ponton átmen egyenes egyenletét.



Oldjuk meg most ezt a feladatot! Az induló és a további Szimplex táblák ekkor:

$$\begin{bmatrix} 0 & v_5 & v_6 & v_7 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 8 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 32 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -1 & 4 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ u*_5 & -1 & 0 & 0 & 8 & 1 & 35 \\ u*_6 & 0 & -1 & 0 & 2 & 6 & 26 \\ u*_7 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 1 \\ z_1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0 \\ z* & -1 & -1 & -1 & 8 & 10 & 62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & v_5 & v_6 & v_7 & x_1 & um_7 & b \\ u_1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{32}{9} \\ u_2 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{328}{9} \\ u_3 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{46}{9} \\ u_4 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{80}{9} \\ um_5 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{26}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{416}{9} \\ um_6 & 0 & -1 & 2 & 6 & -2 & 32 \\ x_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{9} \\ z_1 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{44}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{100}{9} \\ zm & -1 & -1 & \frac{7}{3} & \frac{44}{3} & 0 & \frac{704}{9} \end{bmatrix} \quad \left[\left[2, v_5, v_6, v_7, um_6, um_7, b\right],\right.$$

$$\left[u_1, 0, \frac{1}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{10}{9}, 0\right],$$

$$\left[u_2, 0, -\frac{1}{9}, -\frac{10}{9}, \frac{1}{9}, \frac{10}{9}, 40\right],$$

$$\left[u_3, 0, \frac{7}{72}, -\frac{19}{36}, -\frac{7}{72}, \frac{19}{36}, 2\right],$$

$$\left[u_4, 0, \frac{5}{18}, -\frac{2}{9}, -\frac{5}{18}, \frac{2}{9}, 0\right],$$
$$\left[um_5, -1, \frac{13}{9}, -\frac{23}{9}, -\frac{13}{9}, \frac{23}{9}, 0\right],$$
$$\left[x_1, 0, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{16}{3}\right],$$
$$\left[x_2, 0, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{14}{3}\right],$$
$$\left[z_1, 0, \frac{22}{9}, -\frac{14}{9}, -\frac{22}{9}, \frac{14}{9}, -\frac{268}{3}\right],$$
$$\left[zm, -1, \frac{13}{9}, -\frac{23}{9}, 0, \frac{44}{9}, 0\right]\Bigg] \quad \begin{bmatrix} 3 & v_5 & um_5 & v_7 & um_6 & um_7 & b \\ u_1 & \frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{17}{13} & 0 & -\frac{17}{13} & 0 \\ u_2 & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{17}{13} & 0 & \frac{17}{13} & 40 \\ u_3 & \frac{7}{104} & -\frac{7}{104} & -\frac{37}{104} & 0 & \frac{37}{104} & 2 \\ u_4 & \frac{5}{26} & -\frac{5}{26} & \frac{7}{26} & 0 & -\frac{7}{26} & 0 \\ v_6 & -\frac{9}{13} & \frac{9}{13} & -\frac{23}{13} & -1 & \frac{23}{13} & 0 \\ x_1 & -\frac{3}{26} & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} & 0 & -\frac{1}{26} & \frac{16}{3} \\ x_2 & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{4}{13} & 0 & \frac{4}{13} & \frac{14}{3} \\ z_1 & \frac{22}{13} & -\frac{22}{13} & \frac{36}{13} & 0 & -\frac{36}{13} & -\frac{268}{3} \\ zm & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{9} & \frac{7}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & v_5 & v_6 & v_7 & x_1 & b \\
u_1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{20}{3} \\
u_2 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{100}{3} \\
u_3 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{13}{3} \\
u_4 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{29}{3} \\
u^*_5 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{26}{3} & \frac{104}{3} \\
u^*_6 & 0 & -1 & 2 & 6 & 24 \\
x_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\
z_1 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{44}{3} & -\frac{10}{3} \\
z^* & -1 & -1 & \frac{7}{3} & \frac{44}{3} & \frac{176}{3}
\end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix}
2 & v_5 & v_6 & v_7 & b \\
u_1 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{10}{9} & 4 \\
u_2 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{10}{9} & 36 \\
u_3 & 0 & \frac{7}{72} & -\frac{19}{36} & 2 \\
u_4 & 0 & \frac{5}{18} & -\frac{2}{9} & 3 \\
u^*_5 & -1 & \frac{13}{9} & -\frac{23}{9} & 0 \\
x_1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 4 \\
x_2 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & 3 \\
z_1 & 0 & \frac{22}{9} & -\frac{14}{9} & -62 \\
z^* & -1 & \frac{13}{9} & -\frac{23}{9} & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
3 & v_5 & v_7 & b \\
u_1 & \frac{1}{13} & \frac{17}{13} & 4 \\
u_2 & -\frac{1}{13} & -\frac{17}{13} & 36 \\
u_3 & \frac{7}{104} & -\frac{37}{104} & 2 \\
u_4 & \frac{5}{26} & \frac{7}{26} & 3 \\
v_6 & -\frac{9}{13} & -\frac{23}{13} & 0 \\
x_1 & -\frac{3}{26} & \frac{1}{26} & 4 \\
x_2 & -\frac{1}{13} & -\frac{4}{13} & 3 \\
z_1 & \frac{22}{13} & \frac{36}{13} & -62 \\
z^* & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

A harmadik táblában sikerült a módosított normál célfüggvényt kielégíteni, áttérhetünk a z_1 célfüggvény szerinti optimalizálásra.

$$\left[\begin{array}{cccc} 4 & v_5 & u_1 & b \\ v_7 & \frac{1}{17} & \frac{13}{17} & \frac{52}{17} \\ u_2 & 0 & 1 & 40 \\ u_3 & \frac{3}{34} & \frac{37}{136} & \frac{105}{34} \\ u_4 & \frac{3}{17} & -\frac{7}{34} & \frac{37}{17} \\ v_6 & -\frac{10}{17} & \frac{23}{17} & \frac{92}{17} \\ x_1 & -\frac{2}{17} & -\frac{1}{34} & \frac{66}{17} \\ x_2 & -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{67}{17} \\ z_1 & \frac{26}{17} & -\frac{36}{17} & -\frac{1198}{17} \\ z^* & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc} 5 & u_4 & u_1 & b \\ v_7 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{7}{3} \\ u_2 & 0 & 1 & 40 \\ u_3 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 2 \\ v_5 & \frac{17}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{37}{3} \\ v_6 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{38}{3} \\ x_1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{16}{3} \\ x_2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{14}{3} \\ z_1 & -\frac{26}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{268}{3} \\ z^* & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

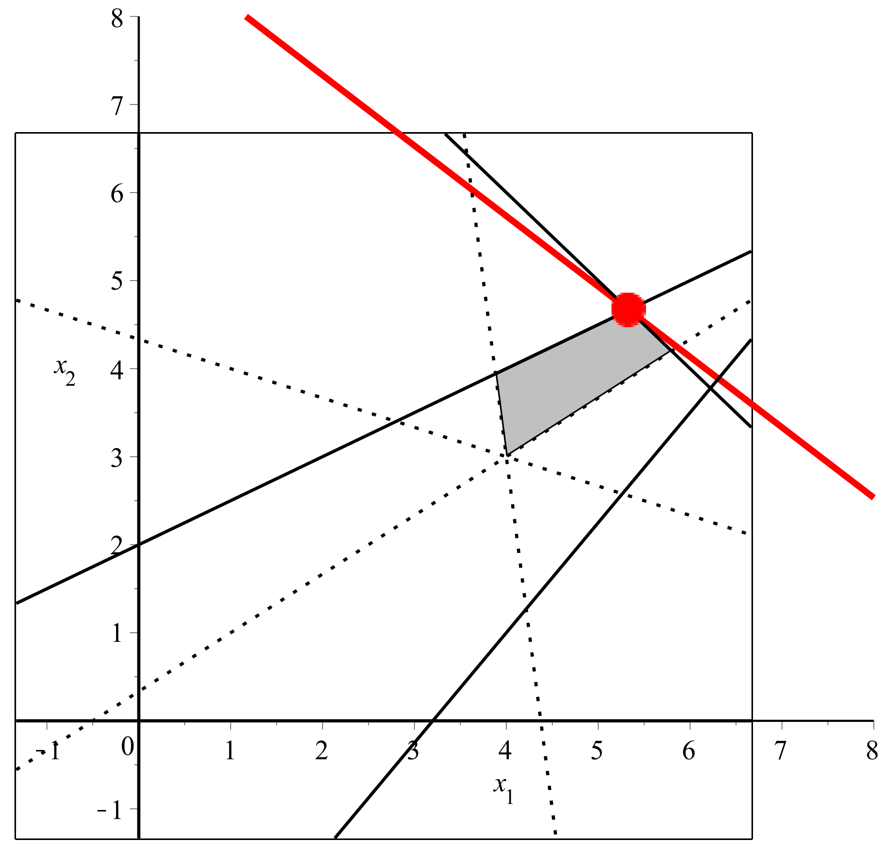
A fenti tábla már optimális. Az errl leolvasható megoldás:

$$x_1 = \frac{16}{3} = 5.33 \quad , \qquad x_2 = \frac{14}{3} = 4,66 \; ,$$
$$v_5 = \frac{37}{3}, \; v_6 = \frac{38}{3}, \; v_7 = \frac{7}{3}$$
$$z = \frac{268}{3}$$

Mindhárom célfüggvény értékeit kiszámolva láthatjuk, hogy ezen pont tényleg jobb pont. (Az elz fejezetben definiált értelemben, - mined célfüggvényre nagyobb értéket szolgáltat.)

$$z_1(4,3) = 35 \qquad < \qquad z_1\left(\frac{16}{3}, \frac{14}{3}\right) = \quad 24$$
$$z_2(4,3) = 26 \qquad < \qquad z_2\left(\frac{16}{3}, \frac{14}{3}\right) = \frac{110}{3} = 31,66$$
$$z_3(4,3) = 1 \qquad < \qquad z_3\left(\frac{16}{3}, \frac{14}{3}\right) = \frac{34}{3} = 11,33$$

Mj: A fenti példa nem bizonyítás, csak demonstrálása az eljárásnak.
Grafikonunkon ábrázolva az eredetileg megadott [4,3] és a feladat megoldás után kapott optimális pontot szintén látható, hogy mindegyik célfüggvény nullától távolodó irányba - vagyis növekedési irányba - tolódott.



Konstruáljuk meg most azt a feladatot, amelyben ezen kapott pont adja a korlátokat - vajon módszerünk képes-e még jobb pontot szolgáltatni.
(A feladat majdnem azonos az elzvel, csak a korlát értékek mások.)

$$K_1 = 8 * \frac{16}{3} + 1 \cdot \frac{14}{3} = \frac{128 + 14}{3} = 24 = 47\frac{1}{3}$$
$$K_2 = 2 * \frac{16}{3} + 6 \cdot \frac{14}{3} = \frac{32 + 84}{3} = \frac{116}{3} = 98\frac{2}{3}$$
$$K_3 = -2 * \frac{16}{3} + 3 \cdot \frac{14}{3} = \frac{-32 + 42}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Mj: Éppen az elbbiekben kiszámított $z_1\left(\frac{16}{3}, \frac{14}{3}\right) = \frac{142}{3}$ stb. értékek, vagyis nem is kellett volna ismételten számítanunk!

Megoldandó feladatunk ekkor:

$$-2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 8,$$
$$2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 \leq 32,$$

$$\frac{5}{4}\cdot x_1 - x_2 \le 4,$$
$$x_1 + x_2 \le 10,$$
$$8\cdot x_1 + 1\cdot x_2 \ge \frac{142}{3},$$
$$2\cdot x_1 + 6\cdot x_2 \ge \frac{116}{3},$$
$$-2\, x_1 + 3\cdot x_2 \ge \frac{10}{3}$$
$$\overline{}$$
$$8\cdot x_1 + 10\cdot x_2$$

A megoldás menetének Szimplex táblái:
Induló:

$$\begin{bmatrix} 0 & v_5 & v_6 & v_7 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 8 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 32 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -1 & 4 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ u*_5 & -1 & 0 & 0 & 8 & 1 & \frac{142}{3} \\ u*_6 & 0 & -1 & 0 & 2 & 6 & \frac{116}{3} \\ u*_7 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \frac{10}{3} \\ z_1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0 \\ z* & -1 & -1 & -1 & 8 & 10 & \frac{268}{3} \end{bmatrix}$$

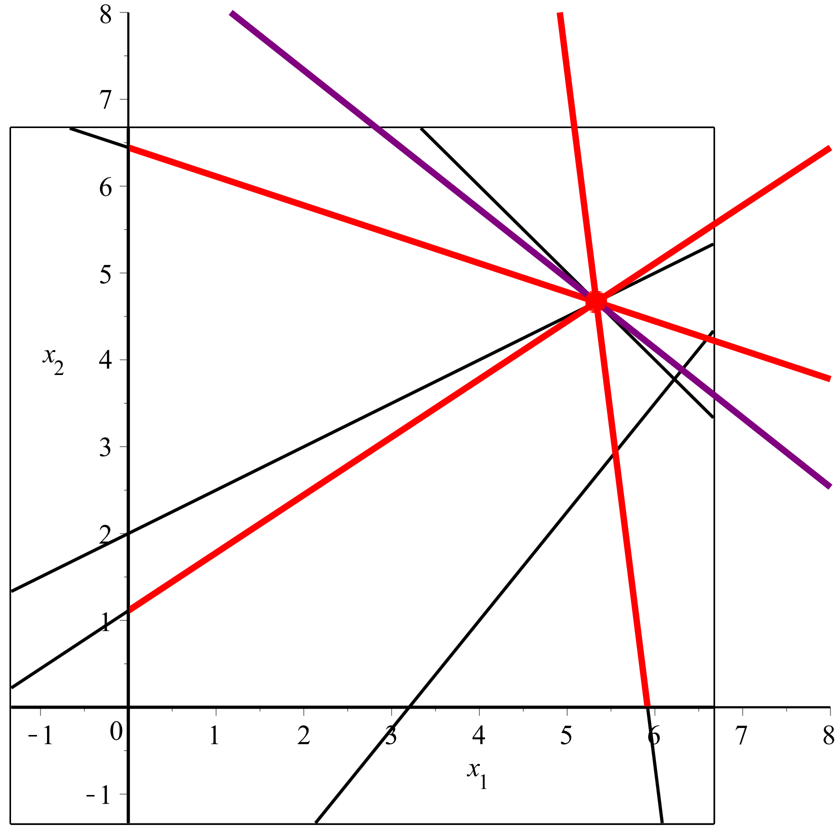
Másodlagos célfüggvény kielégítettségének táblája és a z szerinti optimalizálás lépései:
(u* -ok oszlopait most is megtartottuk.)

$$
\begin{bmatrix}
4 & v_5 & u^*{}_5 & u_1 & u^*{}_6 & u^*{}_7 & b \\
v_7 & \frac{1}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{13}{17} & 0 & -1 & 0 \\
u_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\
u_3 & \frac{3}{34} & -\frac{3}{34} & \frac{37}{136} & 0 & 0 & 2 \\
u_4 & \frac{3}{17} & -\frac{3}{17} & -\frac{7}{34} & 0 & 0 & 0 \\
v_6 & -\frac{10}{17} & \frac{10}{17} & \frac{23}{17} & -1 & 0 & 0 \\
x_1 & -\frac{2}{17} & \frac{2}{17} & -\frac{1}{34} & 0 & 0 & \frac{16}{3} \\
x_2 & -\frac{1}{17} & \frac{1}{17} & \frac{4}{17} & 0 & 0 & \frac{14}{3} \\
z_1 & \frac{26}{17} & -\frac{26}{17} & -\frac{36}{17} & 0 & 0 & -\frac{268}{3} \\
z^* & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{9} & \frac{7}{3} & 0
\end{bmatrix},
\begin{bmatrix}
5 & u_4 & u^*{}_5 & u_1 & u^*{}_6 & u^*{}_7 & b \\
v_7 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{6} & 0 & -1 & 0 \\
u_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\
u_3 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 2 \\
v_5 & \frac{17}{3} & -1 & -\frac{7}{6} & 0 & 0 & 0 \\
v_6 & \frac{10}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -1 & 0 & 0 \\
x_1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{16}{3} \\
x_2 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{14}{3} \\
z_1 & -\frac{26}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{268}{3} \\
z^* & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{9} & \frac{7}{3} & 0
\end{bmatrix}
$$

A leolvasható megoldás, (mely azonos az elz feladat megoldásával):

$$x_1 = \frac{16}{3},\, x_2 = \frac{14}{3},$$
$$v_5 = 0,\ v_6 = 0,\ v_7 = 0$$
$$z = \frac{268}{3}$$

A "tartomány" optimális pont és az ezen átmen mindhárom célfüggvény (pirosak) valamint az aggregált - számításhoz használt, lila - célfüggvény együttes grafikus megjelenítése:



Láthatóan a tartomány egyetlen - a piros optimális - pontra szkült, elfajult.
Mj: Ezt jelzi a sok nulla a számításban. (Degeneráció - a b oszlopban és alternatív optimum a célfüggvény sorában.)
Megállapíthatjuk, hogy eljárásunk nem tudott a most kiindulásként használt pontnál jobb pontot szolgáltatni - mivel a feladat tartománya egyetlen pont volt.
Vagyis ezen pont "legjobb pont" - efficiens pont vagy másként Pareto optimális pont.
Könnyen belátható, hogy a tartomány szélei legtöbb esetben mind tovább nem javítható legjobb pontok, mivel a célfüggvényeket azokba eltolva (kiinduló korlát pontként használva ezen pontokat) a feladat tartománya egyetlen pont, melyet ezen eljárás nem tud tovább javítani.
Ezeket hívjuk Pareto **front**oknak - mivel a tartományok határain összefüggen helyezkednek el.

Összefoglalva:

A többcélú optimalizálási feladatok általános elemzésében használt definícióink:
Efficiens vagy Pareto optimális (legjobb) pont - aminél nincs (vele összehasonlítható) jobb pont.
Egy efficiens pont **elállításá**nak **iteratív** (szukcesszív aproximációs - azaz **sorozaton közelítéses**) **módszere**:
a **jobb pont elállító algoritmus**.
Mely kiindulva egy tetszlegesen választott pontból - ha az nem efficiens pont volt - egy jobb

pontot szolgáltat. (Mely minden célfüggvényre legalább akkora egyben pedig biztosan nagyobb értéket ad.) Ha ezen algoritmus visszaadja a kiindulási pontot, akkor annál nincs jobb pont, vagyis az efficiens pont.
Az algoritmus:
Minden célfüggvénybl ezen ponton átmen alsó korlátot képezünk, a számításhoz célfüggvényként pedig a célfüggvények egyszer aggregáltját (összegét)használjuk. Ez általános típusú LP feladat, mely a v segédváltozók segítségével módosított normállá alakítható és megoldható.

Kidolgozott feladat efficiens pont keresésre

Tekinstük az alábbi három célfüggvényes feladatot:

$$-2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 14,$$
$$2\cdot x_1 - x_2 \le 16,$$
$$\frac{5}{4}\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 8,$$
$$2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 22$$

$$4\cdot x_1 + 1\cdot x_2 = \max.$$
$$2\cdot x_1 + 6\cdot x_2 = \max.$$
$$4\cdot x_1 - 6\cdot x_2 = \max.$$

Vizsgáljuk meg hogy a $x_1 = 2, x_2 = 2$ pont efficiens pont-e. Ehhez számítsuk ki a célfüggvényeket ezen pontban:

$$z_1(2, 2) = 4\cdot 2 + 1\cdot 2 = 10$$
$$z_2(2, 2) = 2\cdot 2 + 6\cdot 2 = 16$$
$$z_3(2, 2) = 4\cdot 2 - 6\cdot 2 = -4$$

Ezeket használva alsó korlátoknak és a célfüggvények egyszer összegét célként, a megoldandó feladatunk:

$$-2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 14,$$
$$2\cdot x_1 - x_2 \le 16,$$
$$\frac{5}{4}\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 8,$$
$$2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 22,$$
$$4\cdot x_1 + 1\cdot x_2 \ge 10,$$
$$2\cdot x_1 + 6\cdot x_2 \ge 16,$$
$$4\cdot x_1 - 6\cdot x_2 \ge -4$$

$$10 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$$

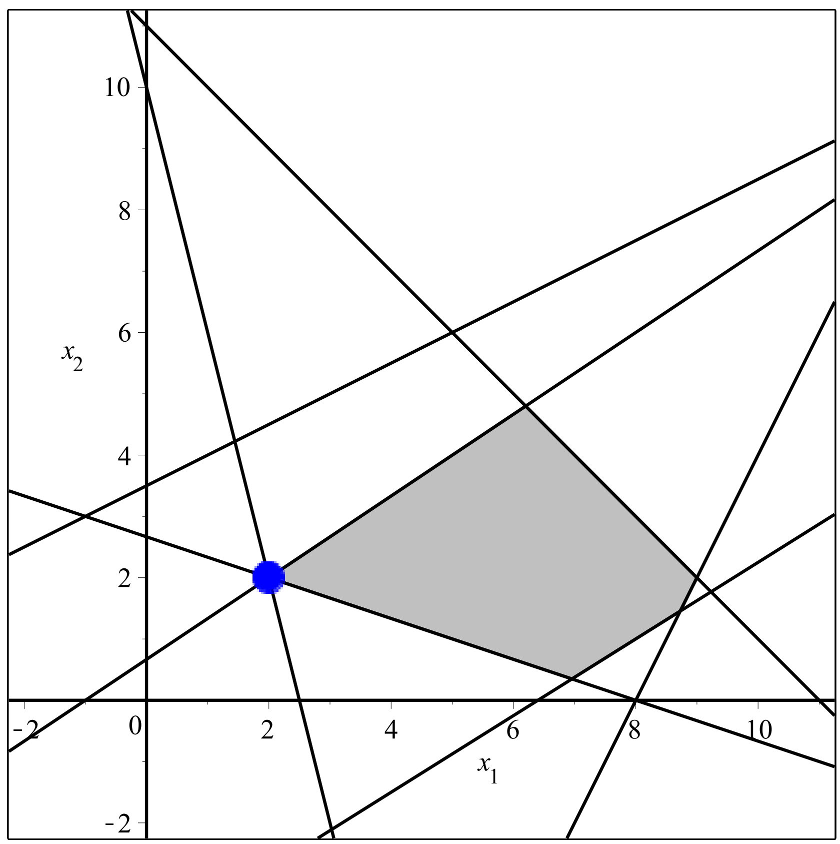
Most csak az ötödik és a hatodik sorba kell v_i eltérés változókat bevezetni, mivel a hetedik sor (-1)-el történ szorzás után kisebb egyenlvé válik!

A feladat induló és további Szimplex táblái:

$$\begin{bmatrix} 0 & v_5 & v_6 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 0 & 0 & -2 & 4 & 14 \\ u_2 & 0 & 0 & 2 & -1 & 16 \\ u_3 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -2 & 8 \\ u_4 & 0 & 0 & 2 & 2 & 22 \\ u*_5 & -1 & 0 & 4 & 1 & 10 \\ u*_6 & 0 & -1 & 2 & 6 & 16 \\ u_7 & 0 & 0 & -4 & 6 & 4 \\ z_1 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 \\ z* & -1 & -1 & 6 & 7 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & v_5 & v_6 & x_2 & b \\ u_1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{9}{2} & 19 \\ u_2 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 11 \\ u_3 & \frac{5}{16} & 0 & -\frac{37}{16} & \frac{39}{8} \\ u_4 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 17 \\ x_1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ u*_6 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{11}{2} & 11 \\ u_7 & -1 & 0 & 7 & 14 \\ z_1 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -25 \\ z* & \frac{1}{2} & -1 & \frac{11}{2} & 11 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & v_5 & v_6 & b \\ u_1 & -\frac{10}{11} & \frac{9}{11} & 10 \\ u_2 & \frac{7}{11} & -\frac{3}{11} & 14 \\ u_3 & \frac{23}{44} & -\frac{37}{88} & \frac{19}{2} \\ u_4 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} & 14 \\ x_1 & -\frac{3}{11} & \frac{1}{22} & 2 \\ x_2 & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & 2 \\ u_7 & -\frac{18}{11} & \frac{14}{11} & 0 \\ z_1 & \frac{29}{11} & -\frac{3}{11} & -22 \\ z* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elértük a másodlagos célfüggvény kielégítettségének állapotát, áttérhetünk célfüggvényünk optimalizálására, de elbb jelenítsük meg a tartományt, az alsó korlátot jelent [2,2] ponttal (kék) együtt:

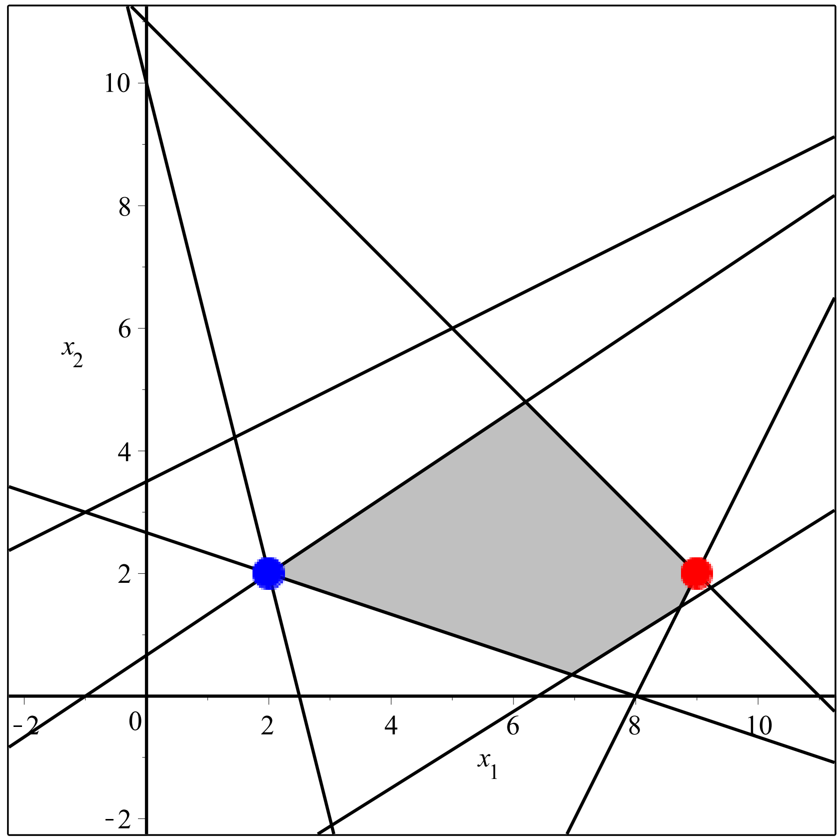


A további báziscserék:

$$
\begin{bmatrix}
3 & u_3 & v_6 & b \\
u_1 & \frac{40}{23} & \frac{2}{23} & \frac{610}{23} \\
u_2 & -\frac{28}{23} & \frac{11}{46} & \frac{56}{23} \\
v_5 & \frac{44}{23} & -\frac{37}{46} & \frac{418}{23} \\
u_4 & -\frac{16}{23} & \frac{13}{23} & \frac{170}{23} \\
x_1 & \frac{12}{23} & -\frac{4}{23} & \frac{160}{23} \\
x_2 & -\frac{4}{23} & -\frac{5}{46} & \frac{8}{23} \\
u_7 & \frac{72}{23} & -\frac{1}{23} & \frac{684}{23} \\
z_1 & -\frac{116}{23} & \frac{85}{46} & -\frac{1608}{23} \\
zm & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix},
\begin{bmatrix}
4 & u_3 & u_2 & b \\
u_1 & \frac{24}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{282}{11} \\
v_6 & -\frac{56}{11} & \frac{46}{11} & \frac{112}{11} \\
v_5 & -\frac{24}{11} & \frac{37}{11} & \frac{290}{11} \\
u_4 & \frac{24}{11} & -\frac{26}{11} & \frac{18}{11} \\
x_1 & -\frac{4}{11} & \frac{8}{11} & \frac{96}{11} \\
x_2 & -\frac{8}{11} & \frac{5}{11} & \frac{16}{11} \\
u_7 & \frac{32}{11} & \frac{2}{11} & \frac{332}{11} \\
z_1 & \frac{48}{11} & -\frac{85}{11} & -\frac{976}{11} \\
zm & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix},
\begin{bmatrix}
5 & u_4 & u_2 & b \\
u_1 & -1 & 2 & 24 \\
v_6 & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & 14 \\
v_5 & 1 & 1 & 28 \\
u_3 & \frac{11}{24} & -\frac{13}{12} & \frac{3}{4} \\
x_1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 9 \\
x_2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\
u_7 & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} & 28 \\
z_1 & -2 & -3 & -92 \\
zm & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Ez a tábla már optimális. A megoldás:

$$x_1 = 9, x_2 = 2 \quad , \text{"célfüggvények:"} \ (z_1 = 92) \qquad v_5 = 28, v_6 = 14$$



Vagyis a [9 , 2] -es pont jobb pont mint az eredetileg javasolt [2 , 2] pont.
Ellenrizhetjük is a célfüggvény értékeket ezen pontokban:

$$z_1(2,2) = 10 \quad < \quad z_1(9,2) = 38$$
$$z_2(2,2) = 16 \quad < \quad z_2(9,2) = 30$$
$$z_3(2,2) = -4 \quad < \quad z_3(9,2) = 24$$

Ténylegesen minden célfüggvényre nagyobb értéket szolgáltatott!

Most indítsuk el algoritmusunkat ebbl a pontból vajon van-e ennél is jobb pont? Ekkor a feladat majdnem azonos az elzvel csak az alsó korlátok értéke módosul. A megoldandó feladat módosított normál feladattá alakított alakját felírva:

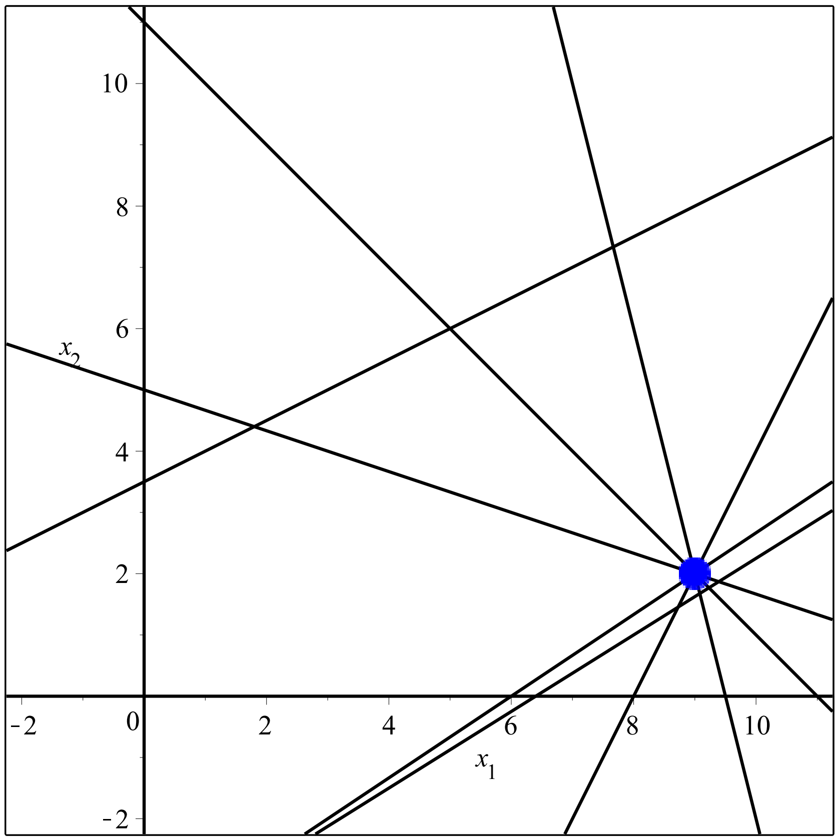
$$-2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 14,$$
$$2 \cdot x_1 - x_2 \leq 16,$$
$$\frac{5}{4} \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \leq 8,$$
$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 22,$$
$$4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - v_5 = 38,$$
$$2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - v_6 = 30,$$

$$4 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - v_7 = 24$$

$$\overline{}$$

$$10 \cdot x_1 + x_2$$

A megengedhet megoldások tartománya ekkor:



Láthatóan egyetlen pont! Vagyis számolás nélkül is biztosak lehetünk benne hogy a [9,2] efficiens pont.
(Mivel megoldásunk nem szolgáltathat mást mint az egyetlen lehetséges (megengedhet megoldások tartományába es) pontot!)

Felírva azért az induló és a további Szimplex táblákat, hogy lássuk számolásainkban hogyan jelenik meg ezen eset:

$$
\begin{bmatrix}
0 & v_5 & v_6 & v_7 & x_1 & x_2 & b \\
u_1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 14 \\
u_2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 16 \\
u_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -2 & 8 \\
u_4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 22 \\
u^*{}_5 & -1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 38 \\
u^*{}_6 & 0 & -1 & 0 & 2 & 6 & 30 \\
u^*{}_7 & 0 & 0 & -1 & 4 & -6 & 24 \\
z_1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 \\
z^* & -1 & -1 & -1 & 10 & 1 & 92
\end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix}
1 & v_5 & v_6 & v_7 & x_2 & b \\
u_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 26 \\
u_2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 4 \\
u_3 & 0 & 0 & \frac{5}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \\
u_4 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 5 & 10 \\
u^*{}_5 & -1 & 0 & 1 & 7 & 14 \\
u^*{}_6 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 9 & 18 \\
x_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & 6 \\
z_1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 16 & -60 \\
z^* & -1 & -1 & \frac{3}{2} & 16 & 32
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
2 & v_5 & v_6 & v_7 & b \\
u_1 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{5}{9} & 24 \\
u_2 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{7}{18} & 0 \\
u_3 & 0 & -\frac{1}{72} & \frac{23}{72} & \frac{3}{4} \\
u_4 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\
u^*{}_5 & -1 & \frac{7}{9} & \frac{11}{18} & 0 \\
x_2 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{18} & 2 \\
x_1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 9 \\
z_1 & 0 & \frac{16}{9} & \frac{29}{18} & -92 \\
z^* & -1 & \frac{7}{9} & \frac{11}{18} & 0
\end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix}
3 & v_5 & v_7 & b \\
u_1 & \frac{1}{7} & -\frac{9}{14} & 24 \\
u_2 & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} & 0 \\
u_3 & -\frac{1}{56} & \frac{37}{112} & \frac{3}{4} \\
u_4 & \frac{5}{7} & -\frac{3}{14} & 0 \\
v_6 & -\frac{9}{7} & \frac{11}{14} & 0 \\
x_2 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 2 \\
x_1 & -\frac{3}{14} & -\frac{1}{28} & 9 \\
z_1 & \frac{16}{7} & \frac{3}{14} & -92 \\
z^* & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

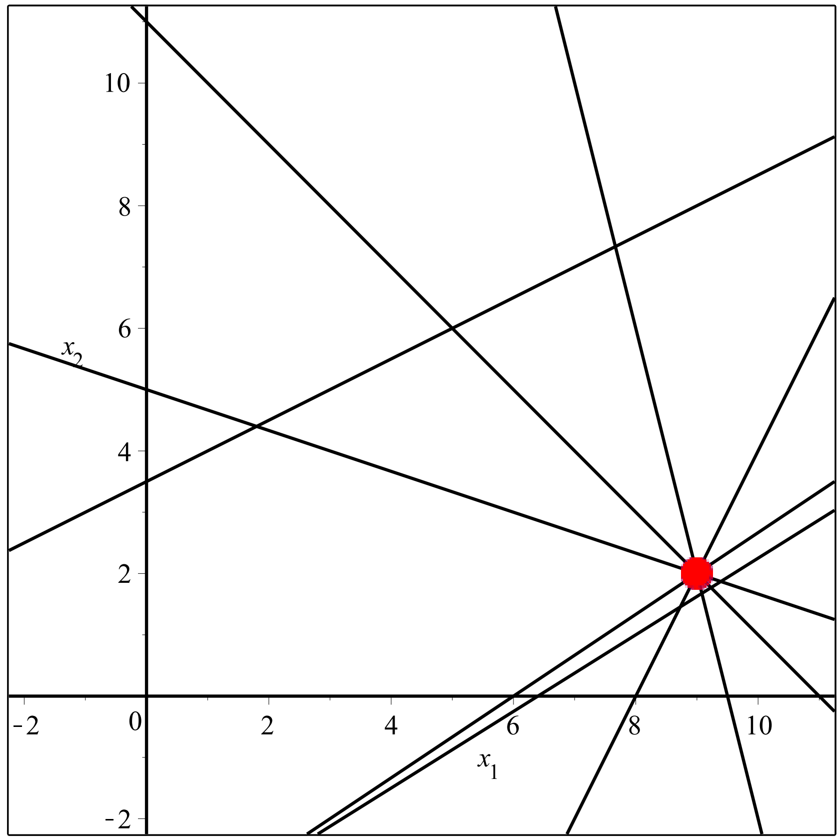
Elértük a másodlagos célfüggvény kielégítettségének állapotát, majd áttérhetünk célfüggvényünk optimalizálására.

$$\begin{bmatrix} 4 & u_2 & v_7 & b \\ u_1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 24 \\ v_5 & \frac{7}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ u_3 & \frac{1}{16} & \frac{11}{32} & \frac{3}{4} \\ u_4 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \\ v_6 & \frac{9}{2} & \frac{7}{4} & 0 \\ x_2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 2 \\ x_1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 9 \\ z_1 & -8 & -\frac{3}{2} & -92 \\ zm & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & u_4 & u^*_5 & u_1 & u^*_6 & u^*_7 & b \\ v_7 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{6} & 0 & -1 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ u_3 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 2 \\ v_5 & \frac{17}{3} & -1 & -\frac{7}{6} & 0 & 0 & 0 \\ v_6 & \frac{10}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -1 & 0 & 0 \\ x_1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{16}{3} \\ x_2 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{14}{3} \\ z_1 & -\frac{26}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{268}{3} \\ z^* & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{9} & \frac{7}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Az errl leolvasható megoldás:

$$x_1 = 9, x_2 = 2 \quad , \text{"célfüggvények:"} \; (z_1 = 92) \;\; v_5 = 0, v_6 = 0, v_7 = 0,$$

Ez láthatóan megegyezik induló megoldásunkkal. Vagyis módszerünk nem tud jobb pontot elállítani, vagyis a megadott pont legjobb (efficiens, Pareto optimális) pont.
A tartomány megjelenítése ezen optimális ponttal:
(Ez teljesen azonos a megengedhet megoldások tartományával, csak a pontot most pirossal szineztük.)



Összefoglalás

Ezen fejezetben a többcélú optimalizálási feladatok néhány kezelési lehetségét mutattuk be.

A szekvenciális optimalizálás módszerét - mely tulajdonképpen a céljaink (küls, fizikai, modellezési) szempontok szerinti sorbarkása után az els célra vonatkozó optimum megkeresése, illetve, ha van az els célnak alternatív optimuma, akkor azok közül a második illetve további célok számára legkedvezbb megoldás kiválasztása.

A dimenziótlanítás módszerét - mely általános modellezési elv. Célfüggvényeink dimenziótlan egyre normálásához szükségünk van ezek minimumának és maximumának kiszámítására. Ezekkel végezhet el a minimumok kivonása után a terjedelemmel (minimum mínusz maximum értékkel) történ osztás, normálás - ami tulajdonképpen a jól ismert százalék fogalomnak felel meg. Így nemcsak dimenziótlan de a [0 , 1] intervallumba es azaz egyre normált függvényeket kapunk. Ezek már aggregálhatóak, súlyokkal összeadhatóak. Ilyen feladatokra láthatunk példát az anyagban.

A korlátok módszerét - melyhez szintén célszer tudnunk az egyedi célok maximumait, nehogy annál nagyobb alsó korlátot adjunk meg. A célfüggvények közül valamelyeket, célszeren egy kivételével mindet, lehet korlátnak tekinteni, majd az egyetlen maximalizálandó célt maximálni.

Az efficiens pont fogalmát - mely olyan értelemben legjobb pont, hogy nincs nála (vele összehasonlítható) jobb pont. Ez a Pareto Optimum fogalmának felel meg.

Az efficiens pont egy szukcesszív approximációs elállítási módszerét, mely a korlátok módszerére épül. Megadunk egy tetszleges (bels = a megengedhet megoldások tartománya beli) pontot, melyen átmen célfüggvény egyeneseket tekintjük nagyobb egyenls korlátoknak, célfüggvényként pedig az egyedi célok egyszer aggregáltjait tekintjük. (Ez nem áll ellentmondásban a dimenziótlanítás fejezettel, mivel ezt a célfüggvényt csak egy jobb pont meghatározásának technikai céljával használjuk majd.) Ha így más, jobb pontot kapunk akkor eredeti pontunk nem volt efficiens. (Mivel van nála jobb pont.) Ha visszakapjuk a megadott pontot, akkor az efficiens pont. (Mivel nincs nála jobb pont.)

A - több esetben hosszú, bonyolultnak tn - részszámítások az esetek többségében bezárható szekciókban találhatóak. Ezek a teljesség, visszaellenrizhetség kedvéért kerültek az anyagba, de ezeket csak az érdekldknek javaslunk áttanulmányozni.

Feladatbank

1. Határozza meg, hogy a [0,5] pont illetve a [8,8] pont efficiens pontja-e a feladatnak?

x1 , x2 nem negatívak

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - x_2 &\;\square\; 8 \\ -x_1 + 4\,x_2 &\;\square\; 24 \\ -2\,x_1 + 2\,x_2 &\;\square\; 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\,x_1 + 5\,x_2 = \max. \\ z_2 &= 6\,x_1 - 2\,x_2 = \max. \end{aligned}$$

2. Elemezze az alábbi többcélú optimalizálási feladatot. Az alábbi preferencia sorrend esetén keresse meg megoldását a szekvenciális optimalizálás módszerével!

x1 , x2 , x3 , x4 >= 0

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &\le 100 \\ x_2 + x_3 + x_4 &\le 80 \\ x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &\le 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 + 2\,x_4 = \max. \\ z_2 &= 4\,x_1 + 6\,x_2 + 5\,x_3 + 4\,x_4 = \max. \\ z_3 &= x_1 - 5\,x_2 + x_3 - 3\,x_4 = \min. \end{aligned}$$

3. Rajzolja fel grafikusan az alábbi többcélú optimalizálási feladatot! Adja meg azon 1-re normált dimenziótlan ered célfüggvény értékét melyben az els célfüggvény 50%-os a második és a harmadik pedig 25-25% súllyal szerepel!

x1 , x2 nem negatívak.

$$\begin{aligned} -2\,x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_1 + 2\,x_2 &\le 12 \\ -x_2 &\le 6 \end{aligned}$$

$z_1 = 6$ [Ft/kg] . x_1 [kg] + 4 [Ft/kg] .x_2 [kg] = max. [Ft]

$z_2 = -1$ [USD/kg] . x_1 [kg]+ 5 [USD/ kg] .x_2 [kg] = max. [USD]

$z_3 = 7$ [liter/kg] .x_1 [kg] - 2 [liter/ kg] . x_2 [kg] = max. [liter]

4. Adja meg az alábbi többcélú LP feladat 1/4 és 3/4 súlyokkal agregált - dimenziótlan egyre normált - célfüggvénnyel történ megoldásának induló tábláját! ! □

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 + x_2 <= 10$
$x_1 <= 6$
$x_1 - x_2 <= 4$

$z_1 = -2x_1 + x_2 = \text{max.}$
$z_2 = 2x_1 - x_2 = \text{max.}$

5. Rajzolja fel grafikusan az alábbi többcélú optimalizálási feladatot! Adja meg azon dimenziótlan ered célfüggvény értékét amelyben az els célfüggvény 40%-os a második 35 a harmadik pedig 25% súllyal szerepel! $x_1 , x_2 \geq 0$

$x_1 + 2x_2 <= 12$
$-x_2 <= 6$

$z_1 = 6x_1 + 4x_2 = \text{max.}$
$z_2 = -x_1 + 5x_2 = \text{max.}$
$z_3 = 7x_1 - 2x_2 = \text{max.}$

6. Adja meg az alábbi többcélú optimalizálási feladatban a mindkét célt 50-50%-ban figyelembevev dimenziótlan ered célfüggvény meghatározásának módját! □

x_1 , x_2 nem negatív

$x_1 + 2x_2 \leq 40$
$-x_1 + 2x_2 \leq 20$
$3/8\, x_1 - x_2 \leq 40$

$z_1 = x_1 + 4x_2 = \text{max.}$ [millió $]
$z_2 = 8x_1 - x_2 = \text{max.}$ [kg]

7. Adja meg az alábbi többcélú optimalizálási feladat dimenziótlan célfüggvényeinek 2/9-es és 7/9-es súlyozásával vett ered célfüggvényére vonatkozó optimális megoldását!

x_1 , x_2 nem negatívak

□ $2x_1 - x_2$ □ 8□
□ $-x_1 + 4x_2$ □24
□ $-2x_1 + 2x_2$ □10

$z_1 = 2x_1 + 5x_2 = \text{max.}$
$z_2 = 6x_1 - 2x_2 = \text{max.}$

8. Alkalmazza a korlátok módszerét az alábbi többcélú optimalizálási feladatra! 60 és 60 % Grafikusan is ábrázolja a számítással vizsgált esetet! □

□ x_1 , x_2 nem negatívak

2 x1 – x2 <= 8
- x1 + 4x2 <= 24

z1 = 2 x1 + 5 x2 = max.
z2 = -2 x1 + 6 x2 = max.

9. Sejtésünk alapján az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak az $\underline{x}_e^T$ =[1 , 4] pont efficiens pontja. Ellenrizze a sejtést!

x1 , x2 nem negatívak
-2 x1 + 2 x2 <= 6
5 x1 + 2 x2 <= 40
x1 <= 6
x2 <= 10

z1= 6 x1 – 3 x2 = max.
z2= - 2 x1 + 3 x2 = max.

10. Állapítsa meg, hogy efficiens pontja-e az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak az $\underline{x}_e^T$ =[5 , 15/2] pont? \011\011\011

x1 , x2 nem negatívak
16 x1 + 2 x2 160
- x1 + 2 x2 10
4 x1 - x2 40

z1 = 4 x1 + 6 x2 = max.
z2 = 5 x1 + 2 x2 = max.

11. Efficiens pontja-e az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak a [2 , 4] pont?

x1 , x2 nem negatívak
4 x1 + 2 x2 ≤ 55
3 x1 - 2 x2 16
x1+ x2 ≤ 20 .

z1 = 6 x1 - 2 x2 = max.
z2 = -3 x1 + 8 x2 = max.

12. Efficiens pontja-e az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak az [1 , 4] pont?

x1 , x2 nem negatívak
6 x1 + 4 x2 ≤ 30
3 x1 - 3 x2 9
x2 ≤ 4 .

z1 = 3 x1 - 5 x2 = max.
z2 = -2 x1 + 9 x2 = max.

13. Efficiens pontja-e az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak az [2 , 14] pont?

x1

, x2 nem negatívak

$2\,x1 - 4\,x2 \leq 40$

□ $2\,x1 + 4\,x2 \;\; 60$

$-\,x1 + 2\,x2 \leq 28$.

$z1 = 5\,x1 - 2\,x2 = \max.$

$z2 = 2\,x1 + 8\,x2 = \max.$

14. Ábrázolja az alábbi többcélú optimalizálási feladatot és vizsgálja az $\underline{x}^T = [10,10]$ pont tulajdonságait! □

x1

, x2 nem negatívak

□ $16\,x1 + 2\,x2 \;\; 160$□

□ $-\,x1 + 2\,x2 \;\; 10$

□ $4\,x1 - x2 \;\; 40$

$z1 = 4\,x1 + 6\,x2 = \max.$

$z2 = 5\,x1 + 2\,x2 = \max.$

15. Efficiens pontja-e az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak az $\underline{x}_e^T = [\,10\,,\,15\,]$ pont? \011

□

□ x1 , x2 nem negatívak

□ $x1 + 2\,x2 \;\; 40$□

□ $-\,x1 + 2\,x2 \;\; 20$

□ $3/8\,x1 - x2 \;\; 40$

$z1 = x1 + 4\,x2 = \max.$

$z2 = 8\,x1 - x2 = \max.$

16. Bizonyítsa be, hogy az alábbi feladatnak az $\underline{x}_e^T = [4\,,\,0\,,\,5\,]$ pont efficiens pontja!

x1 , x2 ,

x3 nem negatívak

$x1 + 2\,x2 \quad <= \;\; 4$

$-x1 + 2\,x3 <= \;\; 6$

$x1 + x3 <= 20$

$z1 = 3\,x1 + 5\,x2 + 8\,x3 = \max.$

$z2 = 3\,x1 - 2\,x2 + 4\,x3 = \max.$

17. Bizonyítsa be, hogy az alábbi feladatnak az $\underline{x}_e^T = [\,8\,,\,10\,,\,15\,]$ nem efficiens pontja!

x1 , x2 ,

x3 nem negatívak

$x1 + 2\,x2 \quad <= \;\; 4$

$-x1 + 2\,x3 <= \;\; 6$

$2\,x1 + x3 <= 20$

$z1 = 3\,x1 + 5\,x2 + 8\,x3 = \max.$

$z2 = 3\,x1 - 2\,x2 + 4\,x3 = \max.$

18. Ellenrizze, hogy az $\underline{x}_e^T$ = [8 , 8] pont efficiens pontja-e az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak! Grafikus ábrázolásának segítségével is támassza alá eredményét!

x1 , x2 nem negatívak

$2 x1 - x2 <= 8$

$- x1 + 4x2 <= 24$

$z1 = 2 x1 + 5 x2 = max.$

$z2 = -2 x1 + 8 x2 = max.$

19. Efficiens pontja-e az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak az $\underline{x}_e^T$ = [2 , 0] pont?

x1 , x2 nem negatívak

$5 x1 + 2 x2 \leq 10$

$- x1 + 2 x2$ 6

$4 x1 - 6 x2 \leq 24$.

$z1 = 4 x1 - 2 x2 = max.$

$z2 = - x1 + 6 x2 = max.$

20. Állapítsa meg, hogy efficiens pontja-e az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak az $\underline{x}_e^T$ = [10 , 12] pont? \011\011

x1 , x2 nem negatívak

$-6 x1 + 10 x2 \leq 60$

$8 x1 - 4 x2$ 32

$x1 - x2$ 4

$x1 + x2 \leq 40$

$z1 = 2 x1 + 8 x2 = max.$

$z2 = 6 x1 + 2 x2 = max.$

21. Ellenrizze, hogy az $\underline{x}_e^T$ = [6 , 4] pont efficiens pontja-e az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak! A feladat grafikus ábrázolásának segítségével támassza alá eredményét!

x1 , x2 nem negatívak

$- 2 x1 + x2 <= 2$

$x1 + x2 <= 10$

$x1 <= 6$

$x2 <= 4$

$x1 - x2 <= 4$

$z1 = - 2 x1 + x2 = max.$

$z2 = 2 x1 - x2 = max.$

22. Ellenrizze, hogy a [10 , 9] pont abszolút optimuma-e az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak?

x1 , x2 nem negatívak

$- 4 x1 + 8 x2$ 32

□ $-10\,x_1 - 6\,x_2 \quad 60$
□ $6\,x_1 - 8\,x_2 \quad 48$
□ □ x_1 □ 10

$z_1 = 2\,x_1 + 5\,x_2 = \max.$
$z_2 = 6\,x_1 - 2\,x_2 = \max.$

23. Határozza meg az alábbi többcélú optimalizálási feladathoz azon dimenziótlan ered célfüggvény értékét amelyben az els célfüggvény 50%-os a második és a harmadik pedig 25-25% súllyal szerepel!

□
□ x_1 , x_2 nem negatívak
$x_1 + 2\,x_2 <= 12$
$- x_2 <= 6$

$z_1 = 6\,x_1 + 4\,x_2 = \max.$
$z_2 = - x_1 + 5\,x_2 = \max.$
$z_3 = 7x_1 - 2\,x_2 = \max.$

24. Vizsgálja, hogy az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak az $\underline{x}_e^T = [\, 4 , 0 , 5 \,]$ efficiens pontja-e!

□
□ x_1 , x_2 nem negatívak
$x_1 + 4\,x_2 <= 14$
$- x_1 + 2\,x_3 <= 16$
$2\,x_1 + x_3 <= 20$

$z_1 = 3\,x_1 + 5\,x_2 + 8\,x_3 = \max.$
$z_2 = 3\,x_1 - 2\,x_2 + 4\,x_3 = \max.$

25. Ellenrizze, hogy az $\underline{x}_e^T = [\, 8 , 8 \,]$ pont efficiens pontja-e az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak! Grafikus ábrázolásának segítségével is támassza alá eredményét!

□
□ x_1 , x_2 nem negatívak
$2\,x_1 - x_2 <= 8$
$- x_1 + 4x_2 <= 24$

$z_1 = 5\,x_1 + 8\,x_2 = \max.$
$z_2 = - x_1 + 3\,x_2 = \max.$

26. Alkalmazza a szekvenciális optimalizálás módszerét az alábbi többcélú optimalizálási feladatra! A függvények elsbbségi sorrendje egyezzen meg indexükkel.
Viszonyítási céllal határozza meg a célfüggvények (egyedi) maximumait is.
x_1 , x_2 , x_3 , x_4 nem negatívak

$x_1 + 2\,x_2 + x_4 <= 100$
$x_2 + x_3 + x_4 <= 80$
$x_1 + x_2 + x_3 <= 50$

$z_1 = 2\,x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = \max.$

$z_2 = 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 = \max.$
$z_3 = x_1 - 6x_2 + x_3 - 3x_4 = \min.$

27. Alkalmazza a szekvenciális optimalizálás módszerét az alábbi többcélú optimalizálási feladatra! A függvények elsbbségi sorrendje egyezzen meg indexükkel. Viszonyítási céllal határozza meg a célfüggvények (egyedi) maximumait is.

x_1

, x_2 , x_3 , x_4 , x_5 nem negatívak

$$x_1 + x_2 + x_4 - x_5 <= 100$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 <= 80$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 <= 50$$

$z_1 = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 = \max.$
$z_2 = 11x_2 + 13x_4 + 9x_5 = \max.$
$z_3 = x_1 - 5x_2 + 2x_4 - 6x_5 = \min.$

28. Ellenrizze, hogy az $\underline{x}_e^T = [\,0 , 8\,]$ pont efficiens pontja-e az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak! Grafikus ábrázolásának segítségével is támassza alá eredményét!

x_1 , x_2 nem negatívak

$$x_1 - 1/2\, x_2 <= 4$$
$$-x_1 + 4x_2 <= 24$$

$z_1 = 2x_1 + 5x_2 = \max.$
$z_2 = -2x_1 + 6x_2 = \max.$

29. Ellenrizze, hogy az $\underline{x}_e^T = [\,3 , 4\,]$ pont efficiens pontja-e az alábbi többcélú optimalizálási feladatnak! Grafikus ábrázolásának segítségével is támassza alá eredményét!

x_1 , x_2 nem negatívak

$$2x_1 - 4x_2 <= 8$$
$$-x_1 + x_2 <= 20$$

$z_1 = 2x_1 + 5x_2 = \max.$
$z_2 = -2x_1 + 6x_2 = \max.$

30. Alkalmazza a korlátok módszerét az alábbi többcélú optimalizálási feladatra! A korlátok értéke legyen az adott függvény mximumának rendre 25% és 50% !

x_1 , x_2 nem negatívak

$$2x_1 - x_2 <= 8$$
$$-x_1 + 4x_2 <= 24$$

$z_1 = 2x_1 + 5x_2 = \max.$
$z_2 = -2x_1 + 6x_2 = \max.$

▼ Irodalom jegyzék

Felhasznált irodalom:

Csernyák László - Jánosa András: Operációkutatás II. A gazdasági optimalizálás módszerei II. Budapest, 2004, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.

Frederick S. Hillier - Gerard J. Liebermann: Bevezetés az operációkutatásba LSI Oktatóközpont, Budapest, 1994.

K. Sydsaeter - P. Hammond: Matematika Közgazdászoknak, Aula Kiadó, Budapest, 1998.

Ferenczi Zoltán: Operációkutatás, Készült a HEFOP 3.3.1-1.-P.-2004-09-0102/1. pályázat támogatásával, Értékünk az ember, Humán Erforrás-fejlesztési Operatív Program 2006. Lektorálta: Hajdu Ottó

Példatár az operációkutatás II. tananyaghoz (Egyéni tanulást segítkidolgozott feladatok) Pénzügyi és Számviteli Fiskola Budapest 1996. F. Sz.: 243.

▶ Programok